Teorija verovatnoće

Slučajni događaji

Definicija: Skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta nazivamo skup elementarnih događaja i označavamo sa Ω.

Primer. Odrediti skup elementarnih događaja u sledećim eksperimentima:
a) Bacanje novčića, Ω={Pismo, Grb}.
b) Bacanje kockice, Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}..
c) Bacanje novčića dva puta, Ω={PP, PG, GP, GG}.

Definicija: Neka su *A* i *B* slučajni događaji.

Slučajni događaj $A \cup B$ je događaj koji se realizuje kada se realizuje događaj *A* ili se realizuje događaj *B*.

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \omega \in A \vee \omega \in B\}.$$

Slučajni događaj $A \cap B$ je događaj koji se realizuje kada se realizuje i događaj *A* i događaj *B*.

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \omega \in A \wedge \omega \in B\}.$$

Ako je $A \cap B = \emptyset$, kažemo da su *A* i *B* disjunktni događaji.

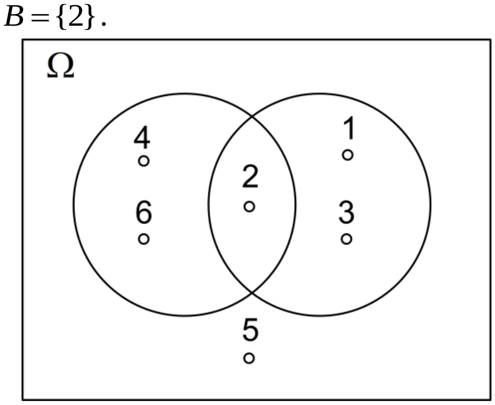
Suprotan događaj događaju *A*, u oznaci $\overline{A}$ je događaj koji se realizuje kada se ne realizuje događaj *A*.

$$\overline{A} = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \omega \notin A\}.$$

Važe sledeće relacije:

$$A \cup \overline{A} = \Omega,$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset,$$
$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Primer. Bacanje kockice, ako *A* označava događaj da kockica pokazuje paran broj a *B* događaj da kockica pokazuje broj manji od 4, odrediti presek i uniju događaja *A* i *B*.
Rešenje:
$A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$, $A \cap B = \{2\}$.



Pojam verovatnoće

- *Laplasova (klasična) definicija verovatnoće*

Pretpostavimo da je skup elementarnih događaja konačan, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ i da svaki elementarni događaj ima istu verovatnoću realizacije. Tada je

$$p_i = P(\omega_i) = \frac{1}{n}.$$

Neka je $A \subset \Omega$, tj. $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}\}$. Tada je $P(A) = \sum_{s=1}^{k} p_{i_s}$, odnosno

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Primer. Kod bacanja kockice: $n = 6$, verovatnoća svakog elementarnog događaja je 1/6. Ako događaj A predstavlja „kockica pokazuje paran broj“, onda je $P(A) = 3/6 = 1/2$.

- *Statistička definicija verovatnoće*

Ako je n broj ponavljanja eksperimenta a m broj uspešnih realizacija događaja A, tada relativna frekvencija m/n predstavlja statističku verovatnoću događaja A, tj

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Primer. Kockica se baca 1200 puta. Rezultat eksperimenata prikazan je u tabeli:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	205	196	193	195	207	204

Ako događaj A predstavlja „kockica pokazuje paran broj“, onda je

$$P(A) = \frac{196 + 195 + 204}{1200} = \frac{595}{1200} \approx \frac{1}{2}$$

Pored ovih definicija verovatnoće, u literaturi se navode *Aksiomatska definicija verovatnoće* i *geometrijska verovatnoća*.

Osnovne osobine:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Verovatnoća unije događaja A i B $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Nezavisni događaji

Definicija: Događaji A i B su nezavisni ako važi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Primer. Kockica se baca dva puta. Koliko iznosi verovatnoća da prvi put pokazuje broj 5 a drugi put broj 2? (Da li se logika menja ako prvi put pokazuje broj 5 a drugi put broj 5?)
Rešenje:

Prvo bacanje	Drugo bacanje					
	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

$P(A) = 1/6$, $P(B) = 1/6$, $P(A \cap B) = 1/36$.

Uslovna verovatnoća

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0\,.$$

Princip proizvoda za uslovne verovatnoće:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) \ \text{ ili } \ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

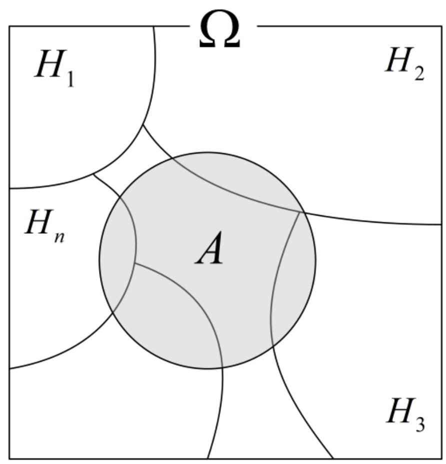
Primer: U kutiji ima r crvenih lopti i b plavih.
a) Koliko iznosi verovatnoća da pri izboru dve lopte bez vraćanja, prva izabrana lopta bude crvena a druga plava.
b) Koliko iznosi verovatnoća da pri izboru dve lopte bez vraćanja, prva izabrana lopta bude plava a druga crvena.
Rešenje:

a) $p = \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b}{b+r-1}$; b) $p = \frac{b}{b+r} \cdot \frac{r}{b+r-1}$

Formula totalne verovatnoće

Definicija: Skup događaja $H_1, H_2, \ldots, H_n$ čine potpun sistem događaja ako je ispunjeno sledeće:

1) $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$
2) $H_i \cap H_j = \varnothing$ za $i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$.



Neka je A nov događaj. Tada važi formula totalne verovatnoće:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$$

Bajesova formula

Iz relacije

$$P(A) \cdot P(B \mid A) = P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

se lako izvodi Bajesova formula:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) P(A)}{P(B)}.$$

U ekonomiji se Bajesova formula često koristi za ažuriranje verovatnoće novim informacijama.

Primer. Pretpostavimo da cena akcija raste u 900 dana i pada u 1100. Sa kojom verovatnoćom cena akcija pada? ($P(A)$ = 0,55 – a priori verovatnoća)

Pretpostavimo da raspolažemo sa dodatnim informacijama o kretanju kamatne stope:

Cena akcija	Kamatna stopa	
	Pada	Raste
Pada	200	900
Raste	800	100

Sa kojom verovatnoćom cena akcija pada ako imamo informaciju da kamatna stopa raste?

Rešenje:

Označimo: B – kamatna stopa raste,
$\overline{B}$ – kamatna stopa pada,
A – cena akcija pada.

Treba izračunati $P(A \mid B)$ = ?

$P(B)$ = 0,5; $P(B \mid A)$ = 0,81818

$P(A \mid B)$ = 0,9 – a posteriori verovatnoća

Primer. Jedna konsultantska firma formirala je model za predviđanje recesije. Model predviđa recesiju sa 80% uspešnosti kada recesija zaista nastupa a predviđa da recesija ne nastupa sa verovatnoćom 90% kada recesija ne nastupa. Verovatnoća nastupanja recesije je 25%. Ako je model predvideo nastupanje recesije, koliko iznosi verovatnoća da će recesija zaista nastupiti?

Rešenje:

Označimo: B – model je predvideo nastupanje recesije,
$\overline{B}$ – model nije predvideo nastupanje recesije,
A – recesija nastupa,
$\overline{A}$ – recesija ne nastupa.

$P(A) = 0{,}25$; $P(\overline{A}) = 0{,}75$;

$P(B|\,A) = 0{,}8$; $P(\overline{B}\,|\,\overline{A}) = 0{,}9 \Rightarrow P(B\,|\,\overline{A}) = 0{,}1$.

Pošto A i $\overline{A}$ čine potpun sistem događaja, primenom formule totalne verovatnoće izračunava se $P(B) = 0{,}275$. Konačno, $P(A\,|\,B) = 0{,}72727$.

Permutacije i kombinacije

Permutacija k elemenata iz skupa n elemenata predstavlja uređenu sekvencu k elemenata. Broj permutacija računa se prema obrascu $P_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Pri tome je $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1$ i $0! = 1$.

Primer. Čovek svakog dana čita novine „A“, „B“, „C“, „D“ . Na koliko načina se može odrediti redosled čitanja

a) sve 4 novine,

b) 3 novine,

c) 2 novine,

d) 1 novine?

Rešenje:

a) $P_4^4 = 24$; b) $P_4^3 = 24$; c) $P_4^2 = 12$; d) $P_4^1 = 4$.

Kombinacija podrazumeva formiranje podskupa od k elemenata iz skupa od n elemenata ($0 \le k \le n$), pri čemu redosled izabranih elemenata nije bitan. Broj kombinacija određuje se prema obrascu $C_n^k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}$.

Primer. U prethodnom primeru na koliko načina se može izabrati X novina koje će biti pročitane (redosled nije bitan), ako je

a) $X = 4$,

b) $X = 3$,

c) $X = 2$,

d) X = 1,
e) X = 0?

Rešenje:

a) $C_4^4 = \binom{4}{4} = 1$; b) $C_4^3 = \binom{4}{3} = 4$; c) $C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$; d) $C_4^1 = \binom{4}{1} = 4$; d) $C_4^0 = \binom{4}{0} = 1$.

Binomna verovatnoća

Bernulijeva šema

Pretpostavimo da se eksperiment A ponavlja n puta ($n \in N$) i da se rezultat eksperimenta beleži samo kao „uspeh“ i „neuspeh“. Neka se eksperiment realizuje sa verovatnoćom p = $p(A)$.

Primer. Navesti Bernulijevu šemu za n = 4.

$\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}$	$\to$	$(1-p)^4$	$\binom{4}{0}$
$\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}A$	$\to$	$p(1-p)^3$	
$\overline{A}\,\overline{A}A\overline{A}$	$\to$	$p(1-p)^3$	$\binom{4}{1}$
$\overline{A}A\overline{A}\,\overline{A}$	$\to$	$p(1-p)^3$	
$A\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}$	$\to$	$p(1-p)^3$	
$\overline{A}\,\overline{A}AA$	$\to$	$p^2(1-p)^2$	
$\overline{A}A\overline{A}A$	$\to$	$p^2(1-p)^2$	
$A\overline{A}\,\overline{A}A$	$\to$	$p^2(1-p)^2$	$\binom{4}{2}$
$\overline{A}AA\overline{A}$	$\to$	$p^2(1-p)^2$	
$A\overline{A}A\overline{A}$	$\to$	$p^2(1-p)^2$	
$AA\overline{A}\,\overline{A}$	$\to$	$p^2(1-p)^2$	
$\overline{A}AAA$	$\to$	$p^3(1-p)$	
$A\overline{A}AA$	$\to$	$p^3(1-p)$	$\binom{4}{3}$
$AA\overline{A}A$	$\to$	$p^3(1-p)$	
$AAA\overline{A}$	$\to$	$p^3(1-p)$	
$AAAA$	$\to$	p^4	$\binom{4}{4}$

Ako određena sekvenca u Bernulijevoj šemi ima k uspešnih i n - k neuspešnih realizacija, onda je verovatnoća da se realizuje upravo takva sekvenca $p^k(1-p)^{n-k}$. Lako se može proveriti da takvih sekvenci ima $\binom{n}{k}$.

Binomna verovatnoća pokazuje verovatnoću uspešne realizacije *k* eksperimenata pri *n* ponavljanja eksperimenta, izračunava se po formuli:

$$p(n;k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Puasonova verovatnoća

Puasonova verovatnoća nastaje kao granični slučaj binomne za veliki broj eksperimenata *n* i malu verovatnoću realizacije eksperimenta *p*. U praktičnim situacijama Puasonova verovatnoća koristi se kada je $n \geq 20$ i $p \leq 0{,}05$.
Puasonova verovatnoća izračunava se po sledećoj formuli:

$$p(n;k) = \frac{m^k}{k!} e^{-m}, \text{ gde je } m = np.$$

Specijalno, poslednja Puasonova verovatnoća određuje se preko izraza:

$$p(n;n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p(n;k).$$

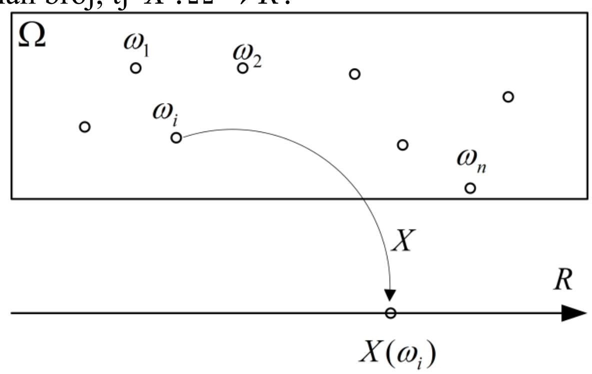
Puasnonove verovatnoće mogu se jednostavnije izračunavati primenom rekurentne formule

$$p(n;k) = \frac{m}{k} p(n;k-1), \text{ za } k > 1,$$

pri čemu je $p(n; k - 1)$ prethodno izračunata Puasnonova verovatnoća.

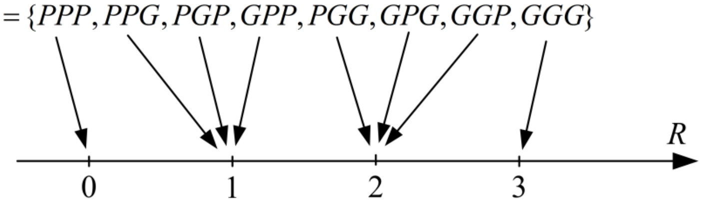
Slučajne promenljive

Definicija: Slučajna promenljiva X je preslikavanje koje svakom elementarnom događaju $\omega \in \Omega$ pridružuje realan broj, tj $X : \Omega \to R$.



Primer. Bacanje novčića, elementarnom događaju pridružuje se broj palih grbova.

Primer. Novčić se baca 3 puta, elementarnom događaju pridružuje se broj palih grbova.



Primer. Kockica se baca 2 puta, elementarnom događaju pridružuje se zbir palih brojeva.

Primer. Tačna težina studenta izabranog na slučajan način.

Primer. Tačno vreme provedeno na pauzi.

Primer. Tačan broj sekundi potrebnih da se popuni anketa.

Slučajne promenljive se dele na prekidne (diskretne) i neprekidne (kontinualne) prema vrednostima koje mogu da se dodele elementarnim događajima. Slučajna promenljiva koja može da uzme konačno ili prebrojivo mnogo vrednosti naziva se prekidna slučajna promenljiva. Slučajna promenljiva koja može da uzme bilo koju vrednost iz nekog intervala naziva se neprekidna slučajna promenljiva.

Prekidne slučajne promenljive

Označimo sa $R_X = \{x_1, x_2, ...\}$ skup mogućih vrednosti slučajne promenljive *X*. Ako je skup R_X konačan, kažemo da je *X* prosta diskretna slučajna promenljiva a ako je R_X beskonačan (ima prebrojivo mnogo elemenata), tada je *X* diskretna slučajna promenljiva.

Neka je $P(X = x_k) = p_k$, $\forall x_k \in R_X$. Tada zapisujemo zakon raspodele slučajne promenljive X na sledeći način:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Pri tom važi $P(X \in R_X) = 1$ i $0 \le p_k \le 1$.

Primer. Koje od prethodno navedenih slučajnih promenljivih su prekidne?

Primer. Novčić se baca 3 puta, elementarnom događaju pridružuje se broj palih grbova. Kako glasi zakon raspodele slučajne promenljive?

Rešenje: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

Transformacije slučajnih promenljivih

Neka je X slučajna promenljiva i $Y = f(X)$. Kako izgleda raspored verovatnoća slučajne promenljive Y ?

Primer.

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Za linearnu funkciju $Y_1 = X + 1$ $Y_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Za linearnu funkciju $Y_2 = 2X$ $Y_2 : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Za linearnu funkciju $Y_3 = 2X + 1$ $Y_3 : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Za kvadratnu funkciju $Y_4 = X^2 + 1$ $Y_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Matematičko očekivanje i varijansa prekidne slučajne promenljive

Definicija: Matematičko očekivanje prekidne slučajne promenljive definiše se sledeći izrazom:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Često se naziva i prosečna vrednost slučajne promenljive. Pokazuje vrednost koja se u proseku može očekivati nakon velikog broja eksperimenata.

Osobine matematičkog očekivanja:

1. $E(C) = C$,
2. $E(\alpha X) = \alpha E(X)$,
3. Za svake dve slučajne promenljive X,Y važi
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$
4. Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Posledica: Za svake dve slučajne promenljive X i Y i $\alpha, \beta \in R$ važi:
$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

Primer: Posmatrajmo $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ i $Y : \begin{pmatrix} -10 & 0 & 10 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Očekivane vrednosti su iste, da li je „rasipanje“ oko očekivane vrednosti podjednako?

Definicija:Varijansa slučajne promenljive predstavlja očekivano kvadratno odstupanje oko prosečne vrednosti slučajne promenljive.
$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$
Osobine varijanse slučajne promenljive:

1. $Var(C) = 0$,
2. $Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$,
3. Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je
$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Posledica: Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je
$$Var(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 Var(X) + \beta^2 Var(Y)$$

Primer. Odrediti matematičko očekivanje i varijansu slučajnih promenljivih X, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.
Rešenje: $E(X) = 0$; $Var(X) = 2/3$; $E(Y_1) = 1$; $Var(Y_1) = 2/3$; $E(Y_2) = 0$; $Var(Y_2) = 8/3$; $E(Y_3) = 1$; $Var(Y_1) = 8/3$; $E(Y_4) = 5/3$; $Var(Y_4) = 2/9$;

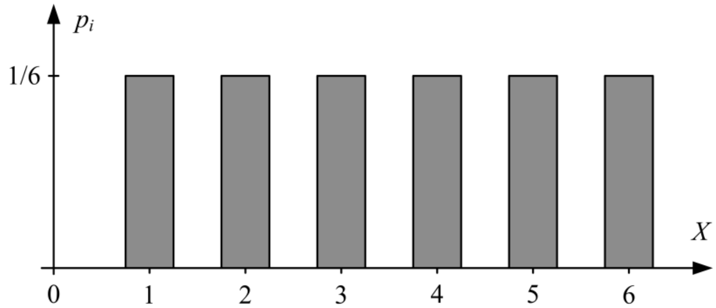
Diskretna uniformna slučajna promenljiva

Slučajna promenljiva X uzima sa podjednakom verovatnoćom bilo koji od brojeva $\{1,2,...,k\}$.
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k} & \dots & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

Osobine:

$E(X)=\frac{x_{\max}+x_{\min}}{2}$ i $Var(X)=\frac{(x_{\max}-x_{\min}+1)^2-1}{12}$.

Primer: Bacanje kockice.



Slika 1. Raspored verovatnoća diskretne uniformne slučajne promenljive za n = 6.

Bernulijeva slučajna promenljiva

Posmatrajmo eksperiment sa tačno dva ishoda “uspeh” ili “neuspeh”. Na primer, baca se kockica i eksperiment A definišemo uspešnim ako je rezultat tog bacanja broj 5. Ako sa p označimo verovatnoću sa kojom se realizuje eksperiment A, tada se Bernulijeva slučajna promenljiva X definiše na sledeći način:

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Osobine:

$E(X)=np$ i $Var(X)=p(1-p)$.

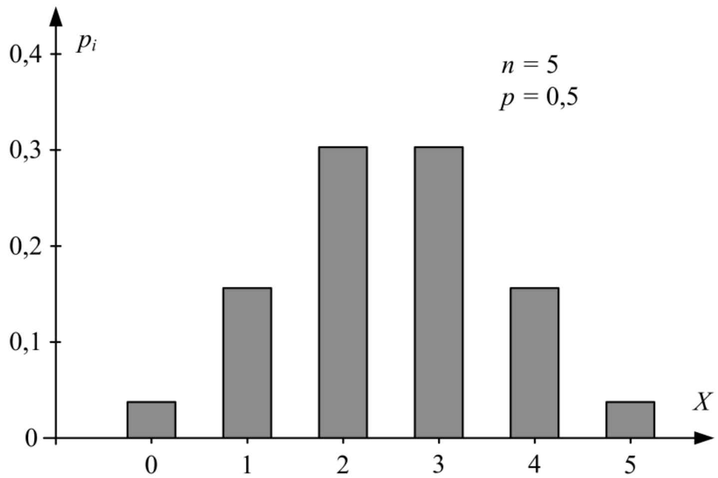
Binomna slučajna promenljiva

Definicija: Neka je data Bernulijeva šema za događaj A, $n\in N$ i p = $p(A)$. Binomna slučajna promenljiva definiše se kao preslikavanje koje svakom elementarnom događaju iz Bernulijeve šeme opredeljuje broj realizacija događaja A.

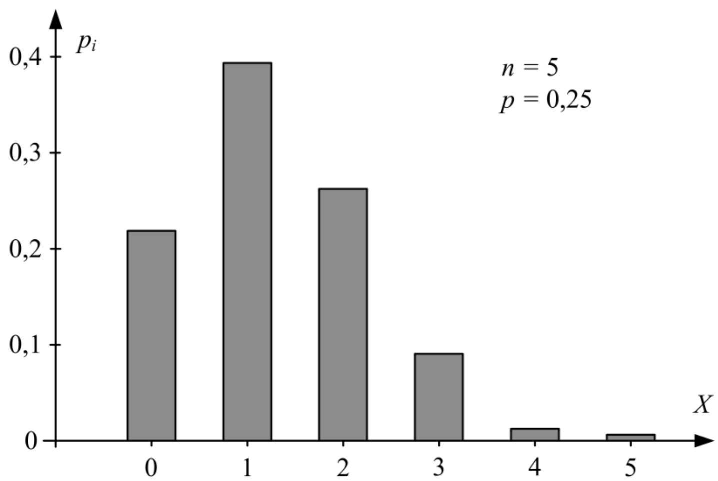
$$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & k & & n \\ \binom{n}{0}p^0q^n & \binom{n}{1}p^1q^{n-1} & \cdots & \binom{n}{k}p^kq^{n-k} & \cdots & \binom{n}{n}p^nq^0 \end{pmatrix}.$$

Osobine:

$E(X)=p$ i $Var(X)=np(1-p)$.



Slika 2. Raspored verovatnoća binomne slučajne promenljive za n = 5 i p = 0,5.



Slika 3. Raspored verovatnoća binomne slučajne promenljive za n = 5 i p = 0,25.

Puasonova slučajna promenljiva

Granični slučaj binomne za veliki broj eksperimenata i malu verovatnoću realizacije.

$$P(X = k) = \frac{m^k}{k!} e^{-k},$$

gde je $m = np$.

Osobine:
$E(X) = m$ i $Var(X) = m$.

Neprekidne slučajne promenljive

Prekidne slučajne promenljive omogućuju odgovor na pitanje koliko iznosi verovatnoća da slučajna promenljiva uzme tačno određenu vrednost $P(X = k) = ?$

Kod promenljivih neprekidnog tipa ta verovatnoća uvek iznosi 0. Umesto ovakvog pitanja postavlja se koliko iznosi verovatnoća da slučajna promenljiva X leži u nekom intervalu od a do b. $P(a < X < b) = ?$

Kako bi se omogućio odgovor na ovo pitanje, uvodi se pojam funkcije gustine f_X.
Ključne osobine funkcije gustine su:

1. Funkcije gustine je nenegativna, $f(x) \geq 0$ za $x \in D$
2. Ukupna površina ispod krive gustine verovatnoće iznosi 1, $\int_D f(x)dx = 1$.
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

Matematičko očekivanje i varijansa neprekidne slučajne promenljive

Definicija: Matematičko očekivanje neprekidne slučajne promenljive definiše se kao

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)dt$$

Osobine matematičkog očekivanja:

1. $E(C) = C$,
2. $E(\alpha X) = \alpha E(X)$,
3. Za svake dve slučajne promenljive X,Y važi
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$
4. Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Posledica: Za svake dve slučajne promenljive X i Y i $\alpha, \beta \in R$ važi:

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

Definicija:Varijansa slučajne promenljive predstavlja očekivano kvadratno odstupanje oko prosečne vrednosti slučajne promenljive.

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - (E(X))^2$$

Osobine varijanse slučajne promenljive:

1. $Var(C) = 0$,
2. $Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$,
3. Ako su X i Y nezavisne slučajne promanljive, tada je
$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Posledica: Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je

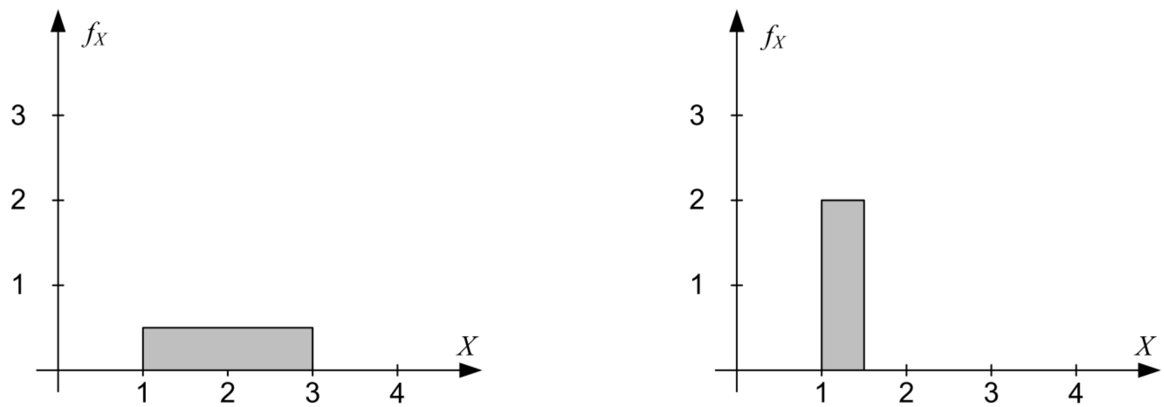
$$Var(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 Var(X) + \beta^2 Var(Y)$$

Uniformni raspored

$$X : U(a,b), \quad a < b,$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Primer. Vreme posluživanja u restoranu brze hrane traje od 1 do 3 minuta.
Primer. Vreme posluživanja u restoranu brze hrane traje od 1 do 1,5 minuta.



Slika 4. Uniformni raspored verovatnoća za različite vrednosti parametara.

Primer. Ustanovljen je kvar na vodovodnoj cevi u rasponu od 50 metara. Koliko metara cevi radnici treba da ispituju pre nego što ustanove kvar?

Osobine:

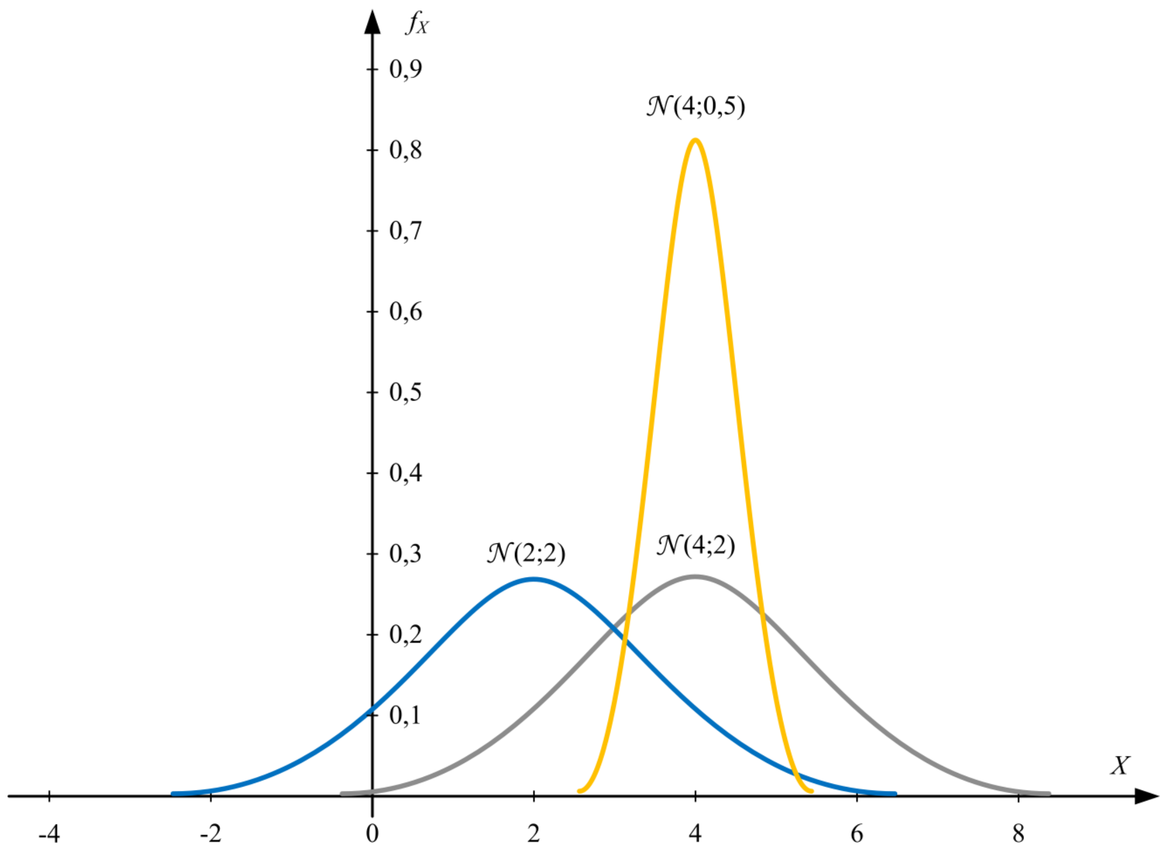
$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Slučajna promenljiva sa normalnim rasporedom

Normalan raspored definisan je parametrima μ, σ^2.

$$X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad \mu \in R, \sigma^2 \geq 0$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad x \in R$$

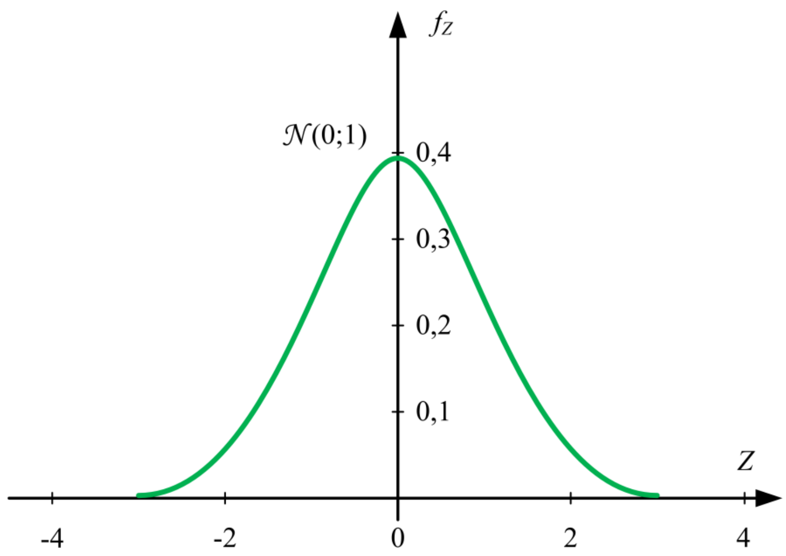


Slika 5. Normalan raspored verovatnoća za različite vrednosti parametara.

Primer. Visina, težina ljudi, masa proizvoda, vreme potrebno za rešavanje testa, i sl.

$Z : \mathcal{N}(0,1)$ - standardizovana slučajna promenljiva

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in R$$



Slika 6. Standardizovan normalan raspored verovatnoća.

Razlozi za korišćenje normalnog rasporeda su brojni:
1. Veliki broj pojava ima približno normalan raspored,
2. Normalan raspored može biti dobra aproksimacija raznih prekidnih rasporeda verovatnoća,
3. Normalan raspored je polazna osnova za definisanje drugih neprekidnih rasporeda,
4. Normalan raspored je osnova za parametarsko statističko zaključivanje,
5. Veliki broj statatističkih problema se rešava ili se može rešavati samo uz pretpostavku da populacija kojoj pripada uzorak ima normalan raspored.

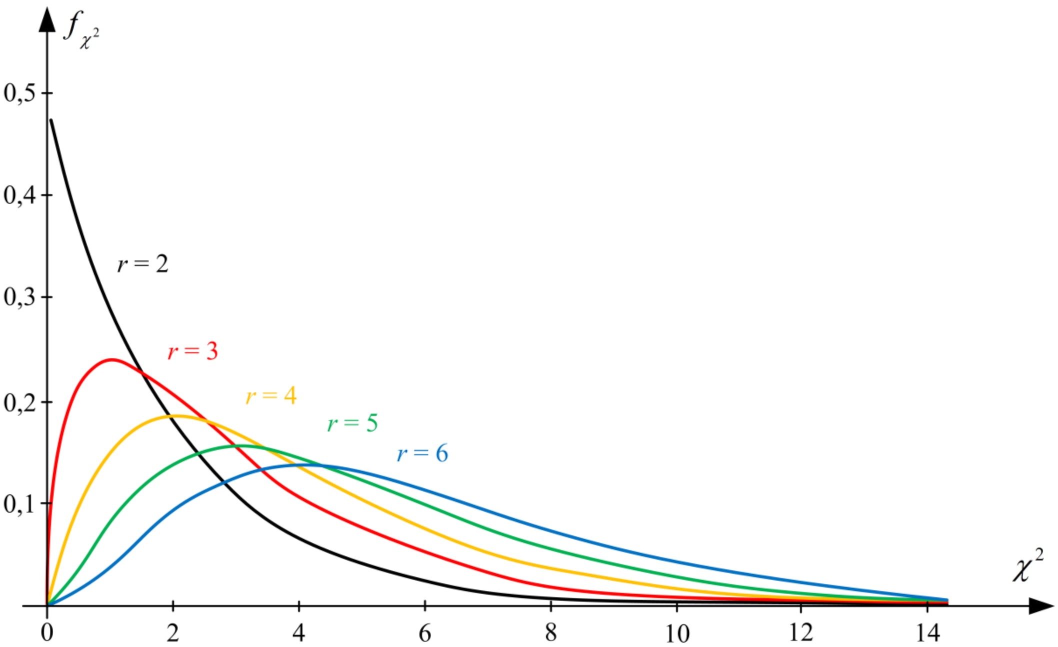
Osobine:
1. Funkcija gustine ima oblik simetričnog zvona
2. Raspored je simetričan u odnosu na $x = \mu$,
3. $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 3$.
4. $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$.

hi-kvadrat raspored

Neka je dato n nezavisnih slučajnih promenljivih Z_1, Z_2, ... , Z_r koje imaju istu raspodelu $Z_i : \mathcal{N}(0,1), i = 1,...,n$. Hi kvadrat raspored definiše se kao:

$$\chi_r^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_r^2$$

Osobine:
$E(\chi_r^2) = r$, $Var(\chi_r^2) = 2r$.



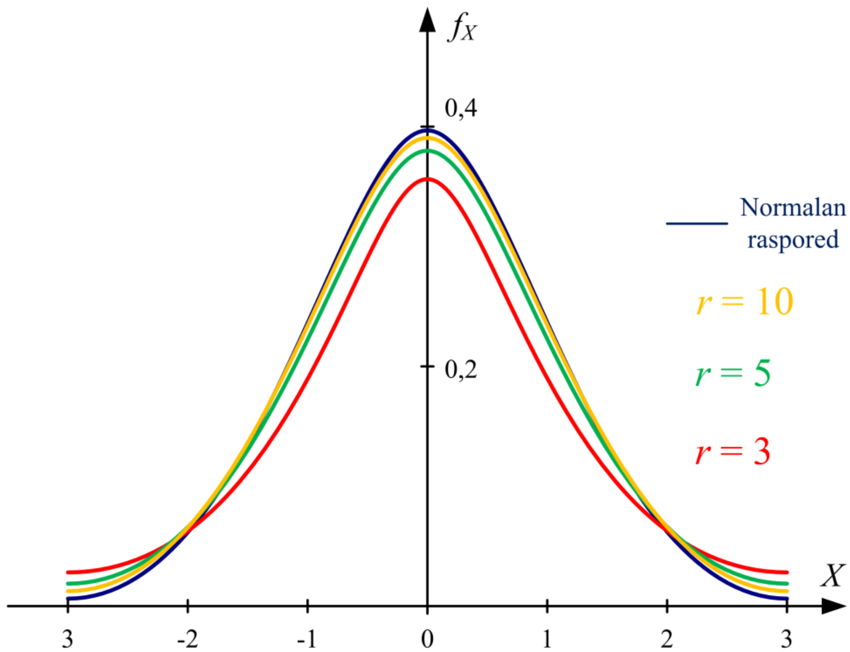
Slika 7. χ_r^2 raspored verovatnoća za različite vrednosti parametara.

Studentov t – raspored

Neka su $Z : \mathcal{N}(0,1)$ i χ_r^2 nezavisne slučajne promenljive. Studentova raspodela sa *r* stepeni slobode se definiše na sledeći način:

$$t_r = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_r^2}{r}}}$$

Osobine:
1. Funkcija gustine je simetrična,
2. Raspored je simetričan u odnosu na $t = 0$,
3. $\alpha_3 = 0$,
4. $E(t_r) = 0$, $Var(t_r) = \dfrac{r}{r-2}$.



Slika 8. Studentov raspored verovatnoća za različite vrednosti parametara.

Snedekorov F – raspored

Neka su χ_m^2 i χ_n^2 nezavisne slučajne promenljive sa m i n stepeni slobode respektivno. Snedekorov F raspored se definiše na sledeći način:

$$F_{m,n} = \frac{\frac{\chi_m^2}{m}}{\frac{\chi_n^2}{n}}$$

$$E(F_{m,n}) = \frac{n}{n-2}, \; Var(F_{m,n}) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}.$$

Pregled osnovnih osobina teorijskih rasporeda

Teorijski raspored		Matematičko očekivanje	Varijansa
Prekidni	Bernulijev	p	pq
	Binomni	np	npq
	Puasonov	m	m
Neprekidni	Uniformni	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
	Normalan	μ	σ^2
	Hi - kvadrat	r	$2r$
	Studentov	0	$\frac{r}{r-2}$
	Snedekorov	$\frac{n}{n-2}$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$

Slučajna promenljiva $\overline{X}$.

Neka su X_1, X_2,..., X_n, nezavisne slučajne promenljive definisane nad istim prostorom verovatnoće, sa istom očekivanom vrednošću μ i varijansom σ^2. Slučajna promenljiva $\overline{X}$ definiše se na sledeći način:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Osobine slučajne promenljive $\overline{X}$:

1. $E(\overline{X}) = \mu$
2. $Var(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$
3. $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Primer:

Godine starosti kod 5 osoba su 18, 20, 22, 24, 26.

a) Odrediti zakon raspodele ove populacije, prosečnu vrednost i standardnu devijaciju.
b) Formirati sve uzorke veličine 2 sa ponavljanjem i odrediti aritmetičke sredine uzoraka.
c) Odrediti prosečnu vrednost i standardnu devijaciju rasporeda aritmetičkih sredina uzoraka.

Rešenje:

a)

$$X = \begin{pmatrix} 18 & 20 & 22 & 24 & 26 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \quad E(X) = 22\,,\ \sigma_X = 2\sqrt{2}\,.$$

b)

Uzorci za n = 2:		$\bar{x}$
18	18	18
18	20	19
18	22	20
18	24	21
18	26	22
20	18	19
20	20	20
20	22	21
20	24	22
20	26	23
22	18	20
22	20	21

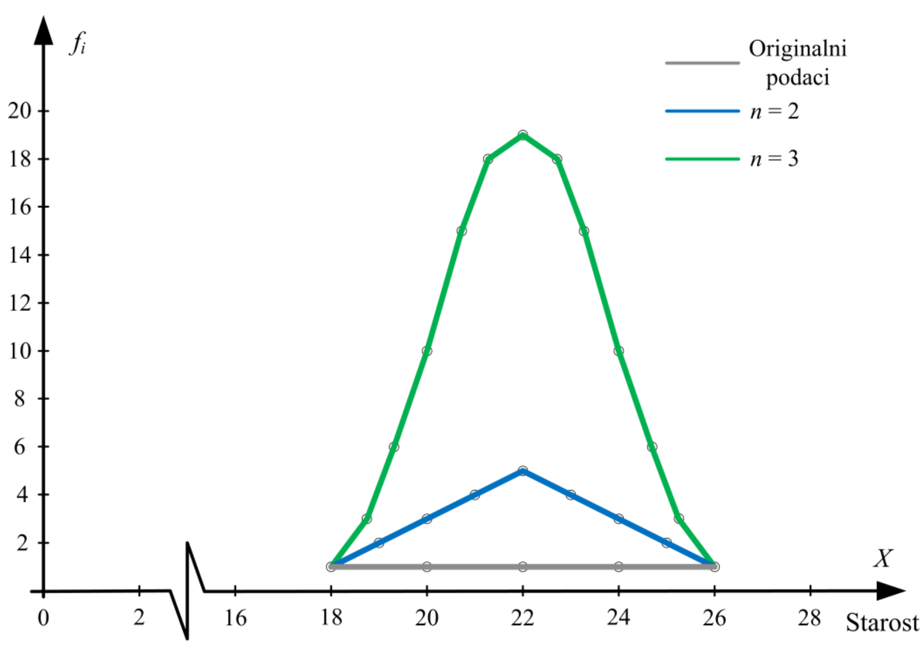
22	22	22
22	24	23
22	26	24
24	18	21
24	20	22
24	22	23
24	24	24
24	26	25
26	18	22
26	20	23
26	22	24
26	24	25
26	26	26

c)

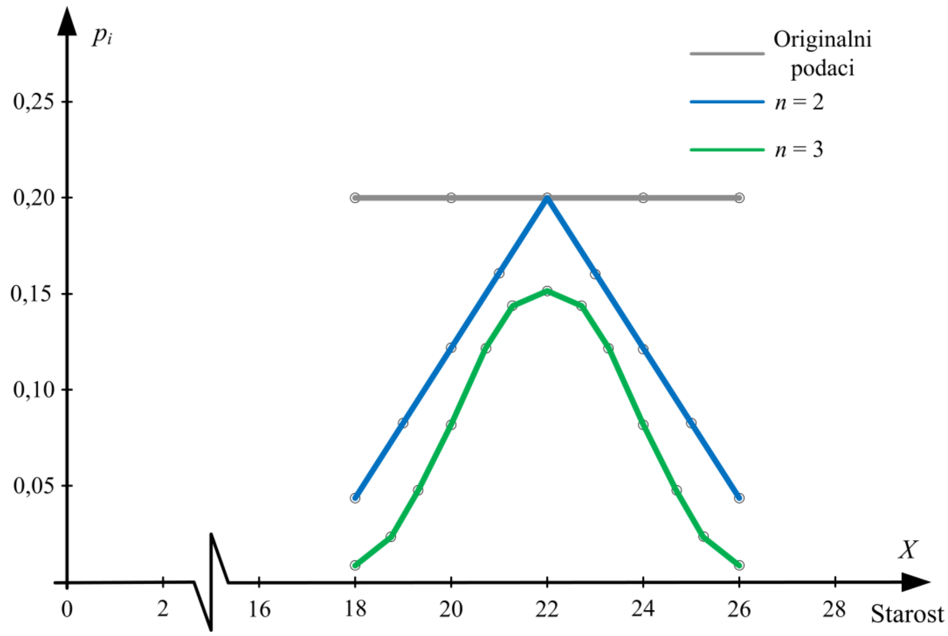
$$X = \begin{pmatrix} 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 0{,}04 & 0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}20 & 0{,}16 & 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}04 \end{pmatrix}$$

$E(\overline{X}) = 22$, $\sigma_{\overline{X}} = 2$.

Na naredne dve slike dat je uporedni prikaz originalnih podataka i distribucije uzoračkih sredina za uzorke sa dva i tri elementa.



Slika 9. Raspored frekvencija aritmetičkih sredina uzoraka.



Slika 10. Raspored relativnih frekvencija aritmetičkih sredina uzoraka.

Slučajna promenljiva $\hat{p}$.

Broj realizacija događaja A, u n nezavisnih eksperimenata ima Binomni raspored sa parametrima n i $p = p(A)$. Označimo sa X broj uspešnih realizacija eksperimenta. Slučajna promenljiva $\hat{p}$ definiše se kao proporcija uspešnih realizacija događaja A u uzorku od n ponavljanja eksperimenta

$$\hat{p} = \frac{X}{n}.$$

Osobine slučajne promenljive $\hat{p}$:

1. $E(\hat{p}) = p$
2. $Var(\hat{p}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$
3. $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$.

Centralna granična teorema

Neka su X_1, X_2,..., X_n, slučajne promenljive, sa istom očekivanom vrednošću μ i varijansom σ^2. Označimo sa $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ i $\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$. Kada $n \to \infty$, distribucija slučajne promenljive

$$Z = \frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

teži ka slučajnoj promenljivoj sa standardizovanim normalnim rasporedom.

Posledice:

- Bez obzira na zajednički raspored nezavisnih slučajnih promenljivih, za dovoljno veliko *n* njihova suma ili prosek ima približno normalan raspored.
- Polazni raspored ne mora čak ni da bude simetričan.
- Polazni raspored može da bude i prekidan (Binomni i Puasonov raspored).