POSTOPTIMALNA ANALIZA

Pod postoptimalnom analizom se podrazumeva skup metoda ispitivanja promena elemenata ekonomsko-matematičkih modela, kao i efekata tih promena na strukturu optimalnog programa. Naša ispitivanja obuhvataju:

- kontrolu računske tačnosti tabele
- ispitivanje promena u vektoru $\underline{c}^T$
- ispitivanje promena u vektoru $\underline{b}$
- analizu osetljivosti optimuma na promene u vektoru $\underline{c}^T$ i vektoru $\underline{b}$

KONTROLA RAČUNSKE TAČNOSTI SIMPLEKS TABELE

Neka je dat model:

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A}\cdot\underline{x} &\leq \underline{b} \\ \underline{c}^T\underline{x} &= z \to \max \end{aligned} \tag{1}$$

prikazan u simpleks tabeli:

	$\underline{x}^T$	
$\underline{d}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$
	$\underline{c}^T$	0

(2)

i neka je nakon k iteracija dobijena sledeća tabela:

	$\underline{r}^T$	
$\underline{s}$	$\underline{B}$	$\underline{b}'$
	$\underline{c}'^T$	$-z_k$

(3)

Ako su računske operacije vršene bez grešaka, treba da važe sledeće jednakosti:

$$\underline{c}'^T = \underline{c}^T(\underline{r}^T) - \underline{c}^T(\underline{s})\cdot\underline{B} \tag{4}$$

$$\underline{b}' = \underline{B}\cdot\underline{b}(\underline{r}^T) + \underline{b}(\underline{s}) \tag{5}$$

sa sledećim značenjem simbola:
$\underline{c}^T(\underline{r}^T)$ vektor vrsta onih koeficijenata funkcije kriterijuma početnog modela koji pripadaju onim promenljivama koje su van baze u tekućoj tabeli, istim tim redosledom,

$\underline{c}^T(\underline{s})$ vektor vrsta onih koeficijenata funkcije kriterijuma početnog modela koji pripadaju onim promenljivama koje su u bazi u tekućoj tabeli, istim tim redosledom; u oba slučaja dualnim promenljivama pripada vrednost nula,

$\underline{b}(\underline{r}^T)$ vektor kolona vrednosti desne strane početnog modela onih promenljivih koje su van baze u tekućoj tabeli, istim tim redosledom,

$\underline{b}(\underline{s})$ vektor kolona vrednosti desne strane početnog modela onih promenljivih koje su u bazi u tekućoj tabeli, istim tim redosledom; u oba poslednja slučaja vrednosti pripadaju dualnim i veštačkim promenljivama a primarnim promenljivama se dodeljuje vrednost nula.

Kontrole navedene relacijama (4) i (5) važe kako za početnu tabelu, tako i za tabele nakon bilo koliko iteracija, a najčešće se koristi za kontrolu konačne (optimalne) tabele.

ODREĐIVANJE OPTIMALNOG REŠENJA PRI PROMENI KOEFICIJENATA U FUNKCIJI KRITERIJUMA

Neka je dat model (1) sa optimalnim rešenjem sadržanim u tabeli (3) i neka je došlo do promene koeficijenata u funkciji kriterijuma početnog modla (1), tako da je početni model:

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A}\cdot\underline{x} &\leq \underline{b} \\ \underline{g}^T\underline{x} &= y \rightarrow \max \end{aligned} \qquad (6)$$

Za određivanje optimuma ovog modela mogu se iskoristiti iteracije vršene za prethodni model, tako da se za model (6) nakon k iteracija dobije tabela:

	$\underline{r}^T$	
$\underline{s}$	$\underline{B}$	$\underline{b}'$
	$\underline{g}'^T$	$-y_k$

(7)

Elementi $\underline{s}$, $\underline{r}^T$, $\underline{B}$ i $\underline{b}'$ se preuzimaju iz tabele (3), a red $\underline{g}'^T$ se računa kao:

$$\underline{g}'^T = \underline{g}^T(\underline{r}^T) - \underline{g}^T(\underline{s})\cdot\underline{B} \qquad (8)$$

dok je:

$$y_k = \underline{g}^T(\underline{s})\cdot\underline{b}' \qquad (9)$$

sa analognim značenjem $\underline{g}^T(\underline{r}^T)$ i $\underline{g}^T(\underline{s})$ kao što je dato za $\underline{c}^T(\underline{r}^T)$ i $\underline{c}^T(\underline{s})$. Dobijena tabela (7) može biti:

- optimalna, što znači da promene u funkciji kriterijuma nisu dovele do promene optimuma prethodnog modela, i
- neoptimalna, sa pozitivnim vrednostima u redu $\underline{g}'^T$; u ovom slučaju vrše se dalje iteracije u cilju dobijanja konačnog optimuma.

ODREĐIVANJE OPTIMALNOG REŠENJA PRI PROMENI DESNE STRANE OGRANIČENJA

Neka je dat model (1) sa optimalnim rešenjem sadržanim u tabeli (3) i neka je došlo do promene desne strane ograničenja početnog modela (1), tako da je model postao:

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A}\cdot\underline{x} &\leq \underline{h} \\ \underline{c}^T\underline{x} &= w \rightarrow \max \end{aligned} \tag{10}$$

Za određivanje optimuma ovog modela možemo iskoristiti rezultat za model (1), tako da se za model (10) nakon k iteracija dobije tabela:

	$\underline{r}^T$	
$\underline{s}$	$\underline{B}$	$\underline{h}'$
	$\underline{c}'^T$	$-w_k$

(11)

Elementi $\underline{s}$, $\underline{r}^T$, $\underline{B}$ i $\underline{c}'^T$ se preuzimaju iz tabele (3) a kolona $\underline{h}'$ se računa na sledeći način:

$$\underline{h}' = \underline{B}\cdot\underline{h}(\underline{r}^T) + \underline{h}(\underline{s}) \tag{12}$$

dok je:

$$w_k = -\underline{c}'^T\cdot\underline{h}(\underline{r}^T) \tag{13}$$

sa analognim značenjem $\underline{h}(\underline{r}^T)$ i $\underline{h}(\underline{s})$ kao što je dato za $\underline{b}(\underline{r}^T)$ i $\underline{b}(\underline{s})$.

Dobijena tabela (11) može biti:

- optimalna, što znači da promene desne strane nisu dovele do promene prethodne optimalne baze, i
- neoptimalna, sa negativnim vrednostima u koloni h'; u ovom slučaju vrše se dalje iteracije (primenom dualnog simpleks postupka) u cilju dobijanja konačnog optimuma.

ANALIZA OSETLJIVOSTI

Ako među elementima $\underline{A}$, $\underline{b}$ ili $\underline{c}$ modela

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A}\cdot\underline{x} &\leq \underline{b} \\ \underline{c}^T\underline{x} &= z \rightarrow \max \end{aligned} \tag{14}$$

postoje i takvi koji su funkcije nekih parametara, tada se radi o parametarskom programiranju. Neka za parametarske funkcije važe sledeća ograničenja:

- postoji samo jedan parametar t,
- parametar je skalar,
- parametarske funkcije su nultog ili prvog stepena i
- od parametra zavise ili samo elementi $\underline{b}$ ili samo elementi $\underline{c}^T$.

Parametarskim programiranjem se može utvrditi u kom intervalu se mogu kretati promene u vektoru $\underline{b}$ ili $\underline{c}^T$, a da te promene ne dovedu do promene prvobitnog programa (optimalnog rešenja polaznog modela).

Interval stabiliteta za vektor $\underline{c}^T$

Za model (14) definiše se parametarski oblik funkcije kriterijuma:

$$\underline{c}_t^T = (\underline{c}^T + \underline{1}^T \cdot t) \cdot \underline{x} = z \rightarrow \max \qquad (15)$$

Na osnovu optimalnog rešenja početnog modela (14), kako je dato u tabeli (3), određuje se optimalno rešenje modifikovanog modela:

	$\underline{r}^T$	
$\underline{s}$	$\underline{B}$	$\underline{b}'$
	$\underline{c}_t'^T$	$-z_k(t)$

(16)

tako da je:

$$\underline{c}_t'^T = \underline{c}_t^T(\underline{r}^T) - \underline{c}_t^T(\underline{s}) \cdot \underline{B} \qquad (17)$$

$$z_k(t) = \underline{c}_t'^T(\underline{s}) \cdot \underline{b}' \qquad (18)$$

prema kriterijumu optimalnosti sledi:

$$\underline{c}_t'^T \leq \underline{0}^T \qquad (19)$$

Rešenje po t sistema nejednačina (19) naziva se intervalom stabiliteta vektora $\underline{c}^T$, što daje odgovor (u kvantitativnom smislu) na pitanje o mogućem smanjenju i povećanju početnih koeficijenata funkcije kriterijuma uz uslov stabilnosti (neizmenjenosti) prvobitnog programa.

Interval stabiliteta za vektor $\underline{b}$

Za model (14) definiše se parametarski oblik vektora kapaciteta:

$$\underline{b}_t = \underline{b} + \underline{1} \cdot t \qquad (20)$$

Na osnovu optimalnog rešenja početnog modela (14), kako je dato u tabeli (3), određuje se optimalno rešenje modifikovanog modela.:

	$\underline{r}^T$	
$\underline{s}$	$\underline{B}$	$\underline{b}_t'$
	$\underline{c}'^T$	$-z_k(t)$

(21)

tako da je:

$$\underline{b}'_t = \underline{B} \cdot \underline{b}_t(\underline{r}^T) + \underline{b}_t(\underline{s}) \qquad (22)$$

$$z_k(t) = \underline{c}'^T \cdot \underline{b}_t(\underline{r}^T) \qquad (23)$$

Prema kriterijumu optimalnosti važi:

$$\underline{b}'_t \geq \underline{0} \qquad (24)$$

Rešenje po t sistema nejednačina (24) naziva se intervalom stabiliteta vektora $\underline{b}$, što daje odgovor na pitanje o mogućem smanjenju i povećanju početnih vrednosti desnih strana uz uslov nepromenjenosti optimalne baze odnosno optimalne asortimanske strukture.

PRIMER 74. Jedna fabrika proizvodi četiri proizvoda (A, B, C i D) na dve mašine (M_1 i M_2). Kapaciteti mašina se mogu koristiti 16 sati dnevno, tokom pet dana u nedelji. Tehnički koeficijenti (čas/kom.) i prodajne cene proizvoda (din/kom.) sadržani su u sledećoj tabeli:

	Tehnički koeficijenti			
Mašine	A	B	C	D
M_1	1	2	1	5
M_2	2	2	0	2
Prodajna cena	150	120	140	40

Proizvoda C može se plasirati najviše toliko koliko proizvoda B. U proizvodnji se koristi sirovina S u količinama od 1 kg, 2 kg, 2 kg odnosno 4 kg po komadu proizvoda, respektivno. Raspoložive nedeljne količine sirovine su 120 kg.

74.1. Odredite nedeljni plan proizvodnje uz maksimalni prihod!

74.2. Izvršite kontrolu tačnosti optimalne simpleks tabele!

74.3. Navedite funkciju kriterijuma koja se odnosi na maksimiranje korišćenja kapaciteta mašina! Da li je program određen u prethodnoj tački optimalan i u ovom slučaju?

74.4. Kako se menja optimalno rešenje određeno u prvoj tački ako se kapacitet prve mašine poveća na 90 časova nedeljno?

74.5. Odredite interval stabiliteta za vektore $\underline{c}^T$ i $\underline{b}$!

R 74.1. Neka je x_j $(j=1,2,3,4)$ broj komada proizvoda A, B, C i D, respektivno.

Model: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 80$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_4 \leq 80$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 120$$
$$-x_2 + x_3 \leq 0$$
$$150x_1 + 120x_2 + 140x_3 + 40x_4 \rightarrow \max$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
d_1	1	2	1	5	80
d_2	**(2)**	2	0	2	80
d_3	1	2	2	4	120
d_4	0	-1	1	0	0
	150	120	140	40	0
	d_2	d_1	d_4	x_4	
x_2	-1/4	1/2	-1/2	2	20
x_1	3/4	-1/2	1/2	-1	20
d_3	1/4	-3/2	-1/2	-3	20
x_3	-1/4	1/2	1/2	2	20
	-47,5	-55	-85	-330	-8200

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 3

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 12000.00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	80.000000	0.000000
X2	0.000000	40.000000
X3	0.000000	0.000000
X4	0.000000	260.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	150.000000
4)	40.000000	0.000000
5)	0.000000	140.000000

NO. ITERATIONS= 3

Optimalno rešenje:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 20 & d_1 = 55 \\ x_2 = 20 & d_2 = 47{,}5 \\ x_3 = 20 & d_3 = 0 \\ x_4 = 0 & d_4 = 85 \end{array}$$

$$z_{max} = 8200$$

Potrebno je proizvesti po 20 komada proizvoda A, B i C. Maksimalni prihod je 8200 dinara. Kapaciteti obe mašine iskorišćeni su 100%. Proširenje za 1 čas postojećeg kapaciteta mašine M_1 može povećati ukupan prihod za 55 dinara. Dodatni čas na mašini M_2 donosi 47,5 dinara dodatnog prihoda. Od sirovine S ostaje 20 kg neprerađeno.

R 74.2. Kontrola tačnosti tabele:

$\underline{b}^T(\underline{r}^T) = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{Kapaciteti}}$

$\underline{c}(\underline{s}) = \begin{bmatrix} 120 \\ 150 \\ 0 \\ 140 \end{bmatrix}$

	d_2	d_1	d_4	x_4	
x_2	−1/4	1/2	−1/2	2	
x_1	3/4	−1/2	1/2	−1	
d_3	1/4	−3/2	−1/2	−3	
x_3	−1/4	1/2	1/2	2	

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{b}(\underline{s})$

$\boxed{\text{Koeficijenti funkcije kriterijuma}}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} = \underline{c}^T(\underline{r}^T)$

$$\underline{c}'^T = [0, 0, 0, 40] - [120, 150, 0, 140] \cdot \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 3/4 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -3/2 & -1/2 & -3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= [-47{,}5,;\ -55;\ -85;\ -330]$$

$$\underline{b}' = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 3/4 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -3/2 & -1/2 & -3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 80 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

R 74.3. Nova funkcija kriterijuma glasi:

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 \to \max$$

$\underline{g}(\underline{s})=$		d_2	d_1	d_4	x_4	
4	x_2	-1/4	1/2	-1/2	2	20
3	x_1	3/4	-1/2	1/2	-1	20
0	d_3	1/4	-3/2	-1/2	-3	20
1	x_3	-1/4	1/2	1/2	2	20
		-1	-1	0	0	y_k=-160
Novi koeficijenti funkcije kriterijuma		0	0	0	7	$=\underline{g}^T(\underline{r}^T)$

$$\underline{g}'^T = [0,0,0,7] - [4,3,0,1]\cdot\begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 3/4 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -3/2 & -1/2 & -3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} = [-1;-1;0;0]$$

$$y_k = -[4,\ 3,\ 0,\ 1]\cdot\begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} = -160$$

Analiza rešenja Izračunat aktuelni red funkcije kriterijuma $\underline{g}'^T$ ne sadrži pozitivne elemente, što znači da je kompletirana tabela optimalna i da novoj funkciji kriterijuma pripada isto primarno optimalno rešenje kao i prvobitnoj funkciji. Vrednost nove funkcije kriterijuma je 160, što je ukupan fond utrošenih časova na mašinama M_1 i M_2, dok nivo ukupnog prihoda i dalje iznosi 8200 dinara.

R 74.4. Izmenjeni vektor $\underline{b}$ označen sa $\underline{h}$ sadrži sledeće komponente:

$$\underline{h} = \begin{bmatrix} 90 \\ 80 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{h}^T(\underline{r}^T)=$	80	90	0	0	Komponente vektora $\underline{h}$

	d_2	d_1	d_4	x_4		
x_2	-1/4	1/2	-1/2	2	25	0
x_1	3/4	-1/2	1/2	-1	15	0
d_3	1/4	-3/2	-1/2	-3	5	120
x_3	-1/4	1/2	1/2	2	25	0
	-47,5	-55	-85	-330	-8750	$=\underline{h}(\underline{s})$

$$\underline{h}' = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 3/4 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -3/2 & -1/2 & -3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \\ 5 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$w_k = [-47{,}5, \ -55, \ -85, \ -330] \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 8750$$

Analiza rešenja Izračunat vektor $\underline{h}'$ ne sadrži negativne elemente, a to znači da se optimalna baza i asortimanska struktura (i u ovom slučaju se proizvode proizvodi A, B i C) ne menjaju, međutim, dolazi do promene u vrednosnoj strukturi primarnog rešenja: po novom programu treba proizvesti 15 komada proizvoda A, 25 komada proizvoda B i 25 komada proizvoda C. Prihod je 8750 dinara. Dualno rešenje se nije promenilo.

R 74.5.

a) Interval stabiliteta za vektor $\underline{c}^T$

Parametarski oblik funkcije kriterijuma je:

$$(150+t)\cdot x_1 + (120+t)\cdot x_2 + (140+t)\cdot x_3 + (40+t)\cdot x_4 \rightarrow \max$$

gde nepoznati parametar t predstavlja moguća kolebanja prodajnih cena.
Primenom računske tehnike prikazane kod kontrole tačnosti, izračunava se poslednji red optimalne simpleks tabele na osnovu parametarskog oblika funkcije kriterijuma:

$\underline{c}_t(\underline{s})=$		d_2	d_1	d_4	x_4	
120+t	x_2	−1/4	1/2	−1/2	2	20
150+t	x_1	3/4	−1/2	1/2	−1	20
0	d_3	1/4	−3/2	−1/2	−3	20
140+t	x_3	−1/4	1/2	1/2	2	20
		−47,5−(1/4)t	−55−(1/2)t	−85−(1/2)t	−330−2t	−8200−60t
Elementi parametarskog oblika funkcije kriterijuma		0	0	0	40+t	$=\underline{c}^T(\underline{r}^T)$

Na osnovu kriterijuma optimalnosti tabele postavlja se sledeći sistem nejednačina koji se rešava po promenljivoj t:

$-47{,}5 - (1/4)t \leq 0$, sledi: $t \geq -190$

$-55 - (1/2)t \leq 0$, sledi: $t \geq -110$

$-85 - (1/2)t \leq 0$, sledi: $t \geq -170$

$-330 - 2t \leq 0$, sledi: $t \geq -155$

Rešenje sistema nejednačina je: $t \in [-110,\ \infty)$

Analiza rešenja Prvobitni program ostaje neizmenjen, tj. stabilan, dok se promene prodajnih cena nalaze u dobijenom intervalu. Znači, rast prodajnih cena ne utiče na optimalno rešenje u smislu promene (gornja granica intervala je ∞), dok smanjenje može iznositi najviše 110 dinara (donja granica intervala je -110). U slučaju promene prodajnih cena u okvirima dobijenog intervala, odgovarajući efekat se određuje na osnovu parametarskog oblika funkcije kriterijuma $z=8200+60\cdot t$. Na primer, ako bi sve cene bile povećane za po 30 din/kom., optimalno rešenje neće biti promenjeno, ali se ukupan prihod menja na $z_{max}=8200+60\cdot 30=1000$.

b) Interval stabiliteta za vektor $\underline{b}$

Parametarski oblik vektora $\underline{b}$ je:

$$\underline{b}_t = \begin{bmatrix} 80 + t \\ 80 + t \\ 120 + t \\ 0 \end{bmatrix}$$

gde t označava moguća kolebanja u elementima vektora $\underline{b}$.

$\underline{b}_t{}^T(\underline{r}^T) = \left| \; 80+t \quad 80+t \quad 0 \quad 0 \; \right|$ — Komponente vektora $\underline{b}_t$

	d_2	d_1	d_4	x_4		$=\underline{b}_t(\underline{s})$
x_2	-1/4	1/2	-1/2	2	20+(1/4)t	0
x_1	3/4	-1/2	1/2	-1	20+(1/4)t	0
d_3	1/4	-3/2	-1/2	-3	20-(1/4)t	120+t
x_3	-1/4	1/2	1/2	2	20+(1/4)t	0
	-47,5	-55	-85	-330	-8200-102,5t	

Na osnovu kriterijuma optimalnosti tabele postavlja se sledeći sistem nejednačina koji se rešava po promenljivoj t:

$20 + (1/4)t \geq 0$, sledi: $t \geq -80$

$20 - (1/4)t \geq 0$, sledi: $t \leq 80$

Rešenje sistema nejednačina je: $t \in [-80, 80]$

Analiza rešenja Dok se kolebanja kapaciteta nalaze u dobijenom intervalu — što znači da se kapaciteti mogu smanjiti najviše za 80 jedinica (donja granica intervala je -80) ili mogu povećati najviše za 80 jedinica (gornja granica intervala je 80) — dotle se neće menjati optimalna baza, niti dualno rešenje; ostaju iste primarne promenljive u programu, ali sa izmenjenom vrednosnom strukturom koja je u funkciji vrednosti promenljive t.

PRIMER 75. U jednoj fabrici se proizvode proizvodi A, B, C i D. Mesečno se mora preraditi najmanje 1600 kg sirovine S_1, najmanje 2000 kg sirovine S_2 i najmanje 2400 kg sirovine S_3. Podaci o utrošcima sirovina u kg po komadu pojedinih proizvoda dati su sledećom tabelom:

Sirovine	Proizvodi			
	A	B	C	D
S_1	0	40	20	2
S_2	25	0	80	0
S_3	20	0	40	0

Proizvodi se obrađuju na mašini M, čiji je kapacitet 200 časova mesečno, a za obradu pojedinih proizvoda potreban je po 1 čas po komadu.

75.1. Odredite optimalni plan proizvodnje uz minimalne troškove! Troškovi su, redom, 20, 80, 120 i 150 din/kom.

75.2. Koji je dozvoljeni interval kolebanja troškova po jedinici proizvoda, ako je potrebno zadržati nepromenjenu strukturu optimalnog rešenja?

75.3. Kako glasi funkcija kriterijuma ako je cilj da se od svih sirovina zajedno prerade maksimalne količine? Da li se menja, i na koji način, optimum određen u prvoj tački?

R 75.1. Neka je x_j ($j=1,2,3,4$) broj komada proizvoda A, B, C i D, respektivno. Model:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

$$\begin{aligned}
40x_2 + 20x_3 + 2x_4 &\geq 1600 \\
25x_1 + 80x_3 &\geq 2000 \\
20x_1 + 40x_3 &\geq 2400 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 200 \\
20x_1 + 80x_2 + 120x_3 + 150x_4 &= v \rightarrow \min
\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
d_1	0	-40	-20	-2	-1600
d_2	-25	0	-80	0	-2000
d_3	**(-20)**	0	-40	0	-2400
d_4	1	1	1	1	200
	-20	-80	-120	-150	0
	d_3	d_1	x_3	x_4	
x_2	0	-1/40	1/2	1/20	40
d_2	-5/4	0	-30	0	1000
x_1	-1/20	0	2	0	120
d_4	1/20	1/40	-3/2	19/20	40
	-1	-2	-40	-146	5600

Optimalno rešenje:

$x_1 = 120$	$d_1 = 2$
$x_2 = 40$	$d_2 = 0$
$x_3 = 0$	$d_3 = 1$
$x_4 = 0$	$d_4 = 0$
$v_{min} = 5600$	$z_{max} = 5600$

Analiza rešenja Potrebno je proizvesti 120 komada proizvoda A i 40 komada proizvoda B. Minimalni troškovi iznose 5600 dinara. Za ovaj obim proizvodnje biće utrošeno 1600 kg sirovine S_1, 3000 kg sirovine S_2, 2400 kg sirovine S_3 i 160 časova rada mašine M.

R 75.2. Parametarski oblik funkcije kriterijuma je:

$$(20+t)\cdot x_1 + (80+t)\cdot x_2 + (120+t)\cdot x_3 + (150+t)\cdot x_4 = v \to \min$$

gde parametar t označava moguća kolebanja troškova po jedinici proizvoda. Pri vršenju računskih operacija treba uzeti u obzir da se i parametarski oblik funkcije kriterijuma pretvara u oblik $z \to \max$, množenjem sa -1.

$\underline{c}_t(\underline{s})=$		d_3	d_1	x_3	x_4	
$-80-t$	x_2	0	$-1/40$	$1/2$	$1/20$	40
0	x_1	$-5/4$	0	-30	0	1000
$-20-t$	d_3	$-1/20$	0	2	0	120
0	d_4	$1/20$	$1/40$	$-3/2$	$19/20$	40
		$-1-(1/20)t$	$-2-(1/40)t$	$-40+(3/2)t$	$-146-(19/20)t$	$5600+160t$
Elementi parametarskog oblika funkcije kriterijuma pomnoženi sa -1		0	0	$-120-t$	$-150-t$	$=\underline{c}^T(\underline{r}^T)$

Uslovi optimalnosti tabele:

$-1 - (1/20)t \le 0$, sledi: $t \ge -20$

$-2 - (1/40)t \le 0$, sledi: $t \ge -80$

$-40 + (3/2)t \le 0$, sledi: $t \ge 80/3$

$-146 - (19/20)t \le 0$, sledi: $t \ge -2929/19$

Rešenje sistema nejednačina je: $t \in [-20,\ 80/3]$.

Analiza rešenja Jedinični troškovi se mogu smanjiti najviše za 20 dinara i povećati najviše za 80/3 dinara uz nepromenjeno primarno optimalno rešenje. Dok se troškovi menjaju u navedenom intervalu, prvobitni primarni program se ne menja ni po asortimanskoj ni po vrednosnoj strukturi, ali ukupni troškovi se, u funkciji parametra t, kreću u intervalu od 2400 do 9866,67 dinara. Ako promene troškova po jedinici proizvoda premaše granice intervala, tada se program menja. Ako su promene po obimu takve da se nalaze na granici intervala, tada postoji alternativni optimum (više optimalnih rešenja).

R 75.3. Ako je cilj da se prerade maksimalne količine sirovina S_1, S_2 i S_3, tada je funkcija kriterijuma:

$$45x_1 + 40x_2 + 140x_3 + 2x_4 = z \rightarrow \max$$

$\underline{g}_t(\underline{s})=$		d_3	d_1	x_3	x_4	
40	x_2	0	-1/40	1/2	1/20	40
0	x_1	-5/4	0	-30	0	1000
45	d_3	-1/20	0	2	0	120
0	d_4	1/20	1/40	-3/2	19/20	40
		45/20	1	30	0	$-y_k$=-7000
Koeficijenti nove funkcije kriterijuma		0	0	140	2	$=\underline{g}^T(\underline{r}^T)$

$$\underline{g}'^T = \begin{bmatrix}0 & 0 & 140 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}40 & 0 & 45 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1/40 & 1/2 & 1/20 \\ -5/4 & 0 & -30 & 0 \\ -1/20 & 0 & 2 & 0 \\ 1/20 & 1/40 & -3/2 & 19/20 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}45/20 & 1 & 30 & 0\end{bmatrix}$$

Dobijena tabela nije optimalna, izračunati red $\underline{g}'^T$ sadrži i pozitivne vrednosti. To znači da novoj funkciji kriterijuma ne pripada isto ono optimalno rešenje kao i prvoj funkciji. Želimo li utvrditi novo optimalno rešenje, sa ciljem maksimalne prerađene količine svih sirovina, postoje dve mogućnosti:

b) model se rešava od početka, formulisanjem nove polazne tabele, s novom funkcijom kriterijuma.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
d_1	0	-40	-20	-2	-1600
d_2	-25	0	-80	0	-2000
d_3	-20	0	-40	0	-2400
d_4	1	1	**(1)**	1	200
	45	40	140	2	0
	x_1	x_2	d_4	x_4	
d_1	20	-20	20	18	2400
d_2	55	80	80	80	14000
d_3	20	40	40	40	5600
x_3	1	1	1	1	200
	-95	-100	-140	-138	-28000

Po novom optimalnom programu treba proizvesti 200 komada proizvoda C. Prerađiće se ukupno 28000 kg sirovina. Kapacitet mašine se koristi 100%.