

## INTERPRETACIJA REŠENJA

**PRIMER 57.** U jednoj fabrici proizvodi A, B i C se proizvode pod sledećim tehnološkim uslovima:

a) Sve proizvode treba obraditi na mašinama  $M_1$  i  $M_2$ . Podaci o tehničkim koeficijentima (čas/kom.) i kapacitetima (čas) su:

Mašine	A	B	C	Kapacitet
$M_1$	1	1/2	1	14000
$M_2$	2	3	1	16000

b) Obim proizvodnje proizvoda C može biti najviše za 7000 komada veći od obima proizvodnje B.

c) Kupci su dostavili pet porudžbina, redom, za 1000, 2000, 1800, 1200 i 1000 komada proizvoda B. Nije obavezno da se porudžbinama u potpunosti udovolji, ali veće količine i nije moguće plasirati na tržištu.

Odredite optimalni asortiman uz maksimalni prihod ako su prodajne cene 10, 20 odnosno 15 novčanih jedinica po komadu.

**R 57.** Neka je  $x_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) broj komada proizvoda A, B i C, respektivno.

**Primarni model:**

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ x_1 + (1/2)x_2 + x_3 &\leq 14000 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 16000 \\ -x_2 + x_3 &\leq 7000 \\ x_2 &\leq 7000 \\ 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

**Primarni model u kanonskom obliku:**

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, d_1^*, d_2^*, d_3^*, d_4^* &\geq 0 \\ x_1 + (1/2)x_2 + x_3 + d_1^* &= 14000 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + d_2^* &= 16000 \\ -x_2 + x_3 + d_3^* &= 7000 \\ x_2 + d_4^* &= 7000 \\ 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

**Dualni model:**

$$\begin{aligned} d_1, d_2, d_3, d_4 &\geq 0 \\ d_1 + 2d_2 &\geq 10 \\ (1/2)d_1 + 3d_2 - d_3 + d_4 &\geq 20 \\ d_1 + d_2 + d_3 &\geq 15 \\ 14000d_1 + 16000d_2 + 7000d_3 + 7000d_4 &\rightarrow \min \end{aligned}$$

**Dualni model u kanonskom obliku:**

$$\begin{aligned} d_1, d_2, d_3, d_4, x_1^*, x_2^*, x_3^* &\geq 0 \\ d_1 + 2d_2 - x_1^* &= 10 \\ (1/2)d_1 + 3d_2 - d_3 + d_4 - x_2^* &= 20 \\ d_1 + d_2 + d_3 - x_3^* &= 15 \\ 14000d_1 + 16000d_2 + 7000d_3 + 7000d_4 &\rightarrow \min \end{aligned}$$

Polazna simpleks tabela postavljena na osnovu primarnog modela:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$d_1$	1	1/2	1	14000
$d_2$	2	<b>(3)</b>	1	16000
$d_3$	0	-1	1	7000
$d_4$	0	1	0	7000
	10	20	15	0

Tabela a)

	$x_1$	$d_2$	$d_3$	
$d_1$	1/4	-3/8	-5/8	3625
$x_2$	1/2	1/4	-1/4	2250
$x_3$	1/2	1/4	3/4	9250
$d_4$	-1/2	-1/4	1/4	4750
	-15/2	-35/4	-25/4	-183750

Tabela c)

Optimalno rešenje za primarni model:

$$x_1=0$$

$$x_2=2250$$

$$x_3=9250$$

$$z_{\max}=183750$$

Dopunske promenljive primarnog modela:

$$d_1^*=3625$$

$$d_2^*=0$$

$$d_3^*=0$$

$$d_4^*=4750$$

Optimalno rešenje za dualni model:

$$d_1=0$$

$$d_2=35/4=8,75$$

$$d_3=25/4=6,25$$

$$d_4=0$$

$$z_{\min}=183750$$

Dopunske promenljive dualnog modela:

$$x_1^*=15/2=7,5$$

$$x_2^*=0$$

$$x_3^*=0$$

U sledećem pregledu prikazan je sadržaj optimalne simpleks tabele u opštem obliku.

BAZNE PROMENLJIVE	VANBAZNE PROMENLJIVE		Vektor kolona kapaciteta $\underline{b}$ <b>NENEGATIVNA <math>\uparrow</math></b>
	Dualne promenljive $\underline{d}_1^T$	Primarne promenljive $\underline{x}_2^{*T}$	
Primarne promenljive $\underline{x}_1$			Vrednosti primarnih promenljivih <b>(1)</b>
Dualne promenljive $\underline{d}_2^*$			Vrednosti dopunskih promenljivih za odgovarajući primarni uslov <b>(2)</b>
Vektor red funkcije kriterijuma $\underline{c}^T$ <b>NEPOZITIVNA <math>\rightarrow</math></b>	Vrednosti dualnih promenljivih <b>(3)</b>  (čitaju se sa pozitivnim predznakom)	Vrednosti dopunskih promenljivih za odgovarajući dualni uslov <b>(4)</b>	Vrednost funkcije kriterijuma (čita se sa pozitivnim predznakom)

Na osnovu gornjeg pregleda i numeričkog primera, za optimalno rešenje se mogu dati sledeća dopunska tumačenja:

- (1)** Bazna primarna promenljiva ima efektivnu vrednost veću ili jednaku nuli, npr.  $x_2=2250$ , a kao dopunska promenljiva jednaka je nuli  $x_2^* = 0$ , to znači da se odgovarajući dualni uslov ostvaruje u vidu jednakosti  $(1/2)d_1+3d_2-d_3+d_4= 20$  tj.  $\frac{1}{2} \cdot 0 + 3 \cdot \frac{35}{4} - \frac{25}{4} + 0 = 20$
- (2)** Bazna dualna promenljiva predstavlja dopunsku promenljivu za primarni uslov, npr.  $d_1^* = 3625$ , a kao efektivna promenljiva, njena vrednost jednaka je nuli  $d_1=0$ . Znači, u optimalnom slučaju odgovarajuće primarno ograničenje je ostvareno kao  $x_1+(1/2)x_2+x_3+d_1^*=14000$  tj.  $0 + \frac{1}{2} \cdot 2250 + 9250 + 3625 = 14000$
- (3)** Vanbazna dualna promenljiva npr.  $d_2=8,75$  pokazuje da je odgovarajući primarni uslov ostvaren sa aktuelnim primarnim programom u vidu jednakosti  $2x_1+3x_2+x_3=16000$  tj.  $2 \cdot 0 + 3 \cdot 2250 + 9250 = 16000$
- (4)** Vanbazna primarna promenljiva kao efektivna promenljiva jednaka je nuli, npr.  $x_1=0$ , a kao dopunska promenljiva je  $x_1^*=7,5$ , pa je odgovarajući dualni uslov ostvaren u vidu  $d_1+2d_2-x_1^*=10$  tj.  $0 + 2 \cdot \frac{35}{4} - \frac{15}{2} = 10$

U cilju kvalitetnih ekonomskih interpretacija i analiza, neophodno je uzeti u obzir preciznije značenje vrednosti dualnih promenljivih. U opštem slučaju, vrednost dualne promenljive, tj. dualna cena označava promenu funkcije kriterijuma pri jediničnom porastu kapaciteta. Međutim, vrednost dualne cene je takođe promenljiva veličina u zavisnosti od nivoa dostignutog kapaciteta, a može, slično funkciji kriterijuma da ima negativne ili pozitivne promene, zavisno od oblika ograničenja, kako je to prikazano u sledećoj tabeli:

OBLIK OGRANIČENJA	PORAST DESNE STRANE OGRANIČENJA DOVODI DO PROMENE VREDNOSTI FUNKCIJE KRITERIJUMA	
	MAKSIMUMA	MINIMUMA
	$\leq$	RASTE
$\geq$	OPADA	RASTE

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 183750.0

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	7.500000
X2	2250.000000	0.000000
X3	9250.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	3625.000000	0.000000
3)	0.000000	8.750000
4)	0.000000	6.250000
5)	4750.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 0

**PRIMER 58.** Za jedan pogon treba odrediti optimalni program proizvodnje za proizvode A, B i C pod uslovima prikazanim u sledećoj tabeli, ako je cilj maksimalni prihod.

Izvori energije	Tehnički koeficijenti (čas/kom.)			Kapacitet (čas)
	A	B	C	
I	2	0	2	100
II	0	3	1	80
III	0	2	2	100
IV	0	2	1	20
Prihod (n.j./kom.)	30	50	60	

**R 58.** Neka je  $x_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) broj komada A, B odnosno C. Model:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$2x_1 + 2x_3 \leq 100$$

$$3x_2 + x_3 \leq 80$$

$$2x_2 + 2x_3 \leq 100$$

$$2x_2 + x_3 \leq 20$$

$$30x_1 + 50x_2 + 60x_3 = z \rightarrow \max$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$d_1$	2	0	2	100
$d_2$	0	3	1	80
$d_3$	0	2	2	100
$d_4$	0	2	<b>(1)</b>	20
	30	50	60	0

	$d_1$	$x_2$	$d_4$	
$x_1$	1/2	-2	-1	30
$d_2$	0	1	-1	60
$d_3$	0	-2	-2	60
$x_3$	0	2	1	20
	-15	-10	-30	-2100

Optimalno rešenje za primarni model je :

$$x_1 = 30, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 20, \quad z_{\max} = 2100$$

Optimalno rešenje duala je:

$$d_1 = 15, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 30, \quad v_{\min} = 2100$$

**Analiza rešenja** Prema optimalnom programu potrebno je proizvesti 30 komada A i 20 komada C. Maksimalni prihod iznosi 2100 novčanih jedinica. Kapaciteti izvora energije I i IV su iskorišćeni 100%. Dodatni čas na izvoru I donosi 15 novčanih jedinica dodatnog prihoda, dok proširenje kapaciteta izvora IV za jedan čas obezbeđuje prihod veći za 30 novčanih jedinica. Na izvorima II i III ostaje po 60 časova neiskorišćeno.



max  $30x_1+50x_2+60x_3$

st

$2x_1+2x_3\leq 100$

$3x_2+x_3\leq 80$

$2x_2+2x_3\leq 100$

$2x_2+x_3\leq 20$

End

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 3

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2100.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	30.000000	0.000000
X2	0.000000	10.000000
X3	20.000000	0.000000

  

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	15.000000
3)	60.000000	0.000000
4)	60.000000	0.000000
5)	0.000000	30.000000

NO. ITERATIONS= 3

**PRIMER 59.** Industrija motornih vozila proizvodi dve vrste teretnih vozila  $V_1$  i  $V_2$ . Proizvodnju ograničavaju sledeći uslovi:

a) Prva faza proizvodnje je priprema pojedinih delova za  $V_1$  i  $V_2$ . U ovoj fazi radi se o alternativnoj proizvodnji. Delovi se mogu pripremiti ili u pogonu  $P_1$  ili u pogonu  $P_2$ . Kapacitet pogona iznosi 3500 časova, odnosno 2000 časova, respektivno. Za pripremu delova za  $V_1$  u pogonu  $P_1$  treba utrošiti 10 časova po vozilu, a ako se ova priprema vrši u pogonu  $P_2$ , tada je potrebno 40 časova po vozilu. Obrada delova za  $V_2$  zahteva 20 časova po vozilu bez obzira u kom pogonu se vrši priprema.

b) Pripremljeni delovi se montiraju na traci. Kapacitet montažne trake je 1300 časova, dok po komadu pojedinih vozila treba utrošiti 1 čas i 2 časa, respektivno, bez obzira u kom pogonu su vozila bila pripremljena.

Odredite optimalni plan proizvodnje uz maksimalni prihod ako su prodajne cene 220000 dinara i 210000 dinara, respektivno.

**R 59.** Neka je  $x_{ij}$  ( $i=1,2$ ;  $j=1,2$ ) broj proizvedenih komada  $i$ -tog dela u  $j$ -tom pogonu.

Model:

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \geq 0$$

$$10x_{11} + 20x_{21} \leq 3500$$

$$40x_{12} + 20x_{22} \leq 2000$$

$$x_{11} + 2x_{21} + x_{12} + 2x_{22} \leq 1300$$

$$220000x_{11} + 210000x_{21} + 220000x_{12} + 210000x_{22} = z \rightarrow \max$$

	$x_{11}$	$x_{21}$	$x_{12}$	$x_{22}$	
$d_1$	<b>(10)</b>	20	0	0	3500
$d_2$	0	0	40	20	2000
$d_3$	1	2	1	2	1300
	220	210	220	210	0
	$d_1$	$x_{21}$	$x_{12}$	$d_2$	
$x_{11}$	1/10	2	0	0	350
$x_{22}$	0	0	2	1/20	100
$d_3$	-1/10	0	-3	-1/10	750
	-22	-230	-200	-21/2	-98000

Optimalno rešenje:

$$x_{11}=350, x_{12}=0, x_{21}=0, x_{22} = 100, z_{\max}=98000000$$

$$d_1=22000, d_2=10500, d_3 = 0$$

**Analiza rešenja** Prema optimalnom programu proizvodi se 350 vozila  $V_1$  i to u pogonu  $P_1$ , i 100 vozila  $V_2$  i to u pogonu  $P_2$ . Maksimalni prihod je 98 miliona dinara. Kapacitet pogona  $P_1$  iskorišćen je 100%, dodatni čas dovodi do porasta prihoda za 22000 dinara. Kapacitet pogona  $P_2$  iskorišćen je 100%, dodatni čas dovodi do porasta prihoda za 10500 dinara. Kapacitet montažne trake nije iskorišćen za 750 časova.

max 220000x11 + 210000x21 + 220000x12 + 210000x22

st

10x11+20x21<=3500

40x12+20x22<=2000

x11+2x21+x12+2x22<=1300

end

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 98.000.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	350.000000	0.000000
X21	0.000000	230000.000000
X12	0.000000	200000.000000
X22	100.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	22000.000000
3)	0.000000	10500.000000
4)	750.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

**PRIMER 60.** Jedna fabrika za proizvodnju 4 proizvoda (A, B, C i D) koristi tri vrste sirovine ( $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$ ). U proizvodnji svakog proizvoda mogu se primeniti dve tehnologije ( $T_1$  i  $T_2$ ). Potrošnja sirovine po jedinici proizvoda zavisi od primenjene tehnologije. Ovi podaci (kg/jedinica proizvoda) kao i raspoložive količine sirovina (kg) sadržane su u sledećoj tabeli:

Sirovine	A		B		C		D		Raspoložive količine
	$T_1$	$T_2$	$T_1$	$T_2$	$T_1$	$T_2$	$T_1$	$T_2$	
$S_1$	8	6	4	6	8	6	10	12	20000
$S_2$	2	4	0	0	2	2	0	0	8000
$S_3$	2	1	8	6	3	4	0	0	10000

Kod postavljanja plana proizvodnje potrebno je uzeti u obzir i gornje limite plasmana: za proizvod A 1000 jedinica, za proizvod B 500 jedinica i za proizvod C 1500 jedinica. Za proizvod D nije postavljen limit.

Odredite koliko jedinica proizvoda koje vrste i po kojoj tehnologiji treba proizvesti, ako je cilj maksimalni prihod! Prodajne cene su, redom, 150, 80, 110 odnosno 140 dinara po jedinici.

**R 60.** Neka je  $x_{ij}$  broj proizvedenih jedinica proizvoda A, B, C odnosno D ( $i=1, 2, 3, 4$ ) po  $j$ -toj tehnologiji ( $j=1, 2$ ). Model:

$$x_{ij} \geq 0$$

$$8x_{11} + 6x_{12} + 4x_{21} + 6x_{22} + 8x_{31} + 6x_{32} + 10x_{41} + 12x_{42} \leq 20000$$

$$2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{31} + 2x_{32} \leq 8000$$

$$2x_{11} + x_{12} + 8x_{21} + 6x_{22} + 3x_{31} + 4x_{32} \leq 10000$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 1000$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 500$$

$$x_{31} + x_{32} \leq 1500$$

$$150x_{11} + 150x_{12} + 80x_{21} + 80x_{22} + 110x_{31} + 110x_{32} + 140x_{41} + 140x_{42} = z \rightarrow \max$$

	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{41}$	$x_{42}$	
$d_1$	8	6	4	6	8	6	10	12	20000
$d_2$	2	4	0	0	2	2	0	0	8000
$d_3$	2	1	8	6	3	4	0	0	10000
$d_4$	1	<b>(1)</b>	0	0	0	0	0	0	1000
$d_5$	0	0	1	1	0	0	0	0	500
$d_6$	0	0	0	0	1	1	0	0	1500
	150	150	80	80	110	110	140	140	0
$x_{41}$	$3/20$	$-11/20$	$-1/20$	$3/10$	$3/20$	$-2/5$	$1/10$	$6/5$	350
$d_2$	-2	-4	0	0	0	-2	0	0	1000
$x_{21}$	$1/8$	$-1/8$	$1/8$	$3/4$	$-1/8$	$-1/2$	0	0	375
$x_{12}$	1	1	0	0	0	0	0	0	1000
$d_5$	$-1/8$	$1/8$	$-1/8$	$1/4$	$1/8$	$1/2$	0	0	125
$x_{32}$	0	0	0	0	1	1	0	0	1500
	-31	-63	-3	-22	-25	-14	-14	-28	-394000

Optimalno rešenje:

$$x_{11} = 0 \qquad d_1 = 14$$

$$x_{12} = 1000 \qquad d_2 = 0$$

$$x_{21} = 375 \qquad d_3 = 3$$

$$x_{22} = 0 \qquad d_4 = 63$$

$$x_{31} = 0 \qquad d_5 = 0$$

$$x_{32} = 1500 \qquad d_6 = 14$$

$$x_{41} = 350$$

$$x_{42} = 0 \qquad z_{\max} = 394000$$

**Analiza rešenja** Prema optimalnom programu proizvodi se 1000 jedinica proizvoda A po drugoj tehnologiji, 375 jedinica proizvoda B po prvoj tehnologiji, 1500 jedinica proizvoda C po drugoj tehnologiji i 350 jedinica proizvoda D po prvoj tehnologiji. Maksimalni prihod je 394000 dinara. Sirovine  $S_1$  i  $S_3$  iskorišćene su 100%, a povećanje za po jedan kilogram može povećati prihod za 14 odnosno 3 dinara, respektivno. Od sirovine  $S_2$  ostaje na zalihama 1000 kg. Proizvodi A i C se proizvode tačno toliko koliko je određeno gornjim plasmanskim ograničenjem. Kada to ograničenje ne bi postojalo, svaka dodatna jedinica proizvodnje proizvoda A bi dovela do povećanja prihoda za 63 dinara, a proizvoda C za 14 dinara. Proizvoda B se proizvodi za 125 manje nego što je gornje ograničenje plasmana.

$$\max 150x_{11}+150x_{12}+ 80x_{21}+80x_{22}+110x_{31}+110x_{32}+140x_{41}+140x_{42}$$

st

$$8x_{11}+6x_{12}+4x_{21}+6x_{22}+8x_{31}+6x_{32}+10x_{41}+12x_{42}\leq 20000$$

$$2x_{11}+4x_{12}+2x_{31}+2x_{32}\leq 8000$$

$$2x_{11}+x_{12}+8x_{21}+6x_{22}+3x_{31}+4x_{32}\leq 10000$$

$$x_{11}+x_{12}\leq 1000$$

$$x_{21}+x_{22}\leq 500$$

$$x_{31}+x_{32}\leq 1500$$

end

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 394000.0

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
----------	-------	--------------

X11	0.000000	31.000000
-----	----------	-----------

X12	1000.000000	0.000000
-----	-------------	----------

X21	375.000000	0.000000
-----	------------	----------

X22	0.000000	22.000000
-----	----------	-----------

X31	0.000000	25.000000
-----	----------	-----------

X32	1500.000000	0.000000
-----	-------------	----------

X41	350.000000	0.000000
-----	------------	----------

X42	0.000000	28.000000
-----	----------	-----------

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
-----	------------------	-------------

2)	0.000000	14.000000
----	----------	-----------

3)	1000.000000	0.000000
----	-------------	----------

4)	0.000000	3.000000
----	----------	----------

5)	0.000000	63.000000
----	----------	-----------

6)	125.000000	0.000000
----	------------	----------

7)	0.000000	14.000000
----	----------	-----------

NO. ITERATIONS= 4