

CILJNO PROGRAMIRANJE

Poseban slučaj višekriterijumskog je tzv. ciljno programiranje, pri čemu se za pojedine kriterijume postavljaju ciljne veličine koje treba dostići, i koje se ugrađuju u sistem ograničavajućih uslova, dok se zajednička funkcija kriterijuma odnosi na minimizaciju ponderisanih odstupanja ostvarenih od ciljnih veličina. Kao ciljne veličine za pojedine funkcije kriterijuma mogu se postaviti neke ocenjene poželjne vrednosti, ekspertska očekivanja, ali i idealne vrednosti.

Model ciljnog programiranja:

$$\begin{aligned}x_j, d_k^-, d_k^+ &\geq 0, \text{ za svako } j \text{ i svako } k \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i=1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j + d_k^- - d_k^+ &= z_k, \quad k = 1, 2, \dots, r \\ \sum_{k=1}^r (m_k^- \cdot d_k^- + m_k^+ \cdot d_k^+) &= z \rightarrow \min \\ m_k^-, m_k^+ &\geq 0\end{aligned}$$

gde je:

z_k	ciljna veličina za k-ti cilj, $k=1, 2, \dots, r$
d_k^-	dopunska promenljiva koja pokazuje za koliko je cilj podbačen
d_k^+	dopunska promenljiva koja pokazuje za koliko je cilj premašen
m_k^-, m_k^+	su ponderi važnosti ciljeva; pomoću njih se dodeljuju penali zbog odstupanja ostvarenja od ciljnih veličina

PRIMER 98. Fabrika baznih hemijskih proizvoda proizvodi tri proizvoda A, B i C pod sledećim tehnološkim uslovima i elementima kriterijuma datim po jedinici proizvoda:

Izvor	PROIZVOD			Kapacitet
	A	B	C	
Postrojenje I (časova)	1	1	1/2	15
Postrojenje II (časova)	1/3	1	2	12
Sirovina I (tona)	2	3	0	30
Sirovina II (tona)	0	2	1	neograničeno
Dobit (novčanih jedinica)	3	4	6	
Emisija štetnih materija (jedinica)	2	8	5	

Kapacitet postrojenja II se mora u potpunosti iskoristiti, a od sirovine II mora se preraditi najmanje 18 tona. Potrebno je odrediti takav program proizvodnje koji istovremeno uzima u obzir kako maksimiziranje dobiti, tako i minimiziranje emisije štetnih materija. Postavljene su ciljne veličine dobiti 48 novčanih jedinica i emisije štetnih materija 70 jedinica. Odredite metodom ciljnog programiranja takav program proizvodnje, kojim se minimizira odstupanje od ciljnih veličina, s tim da svaka jedinica podbačaja dobiti ispod 48 novčanih jedinica bude penalizirana s ponderom 7, a svaka jedinica prebačaja emisije štetnih materija iznad 70 jedinica ponderom 2!

R 98. U sistem ograničavajućih uslova potrebno je ugraditi i ciljna ograničenja i definisati, pored primarnih i dopunske promenljive za prebačaj i podbačaj, posebno za svako ciljno ograničenje.

Neka su:

x_1, x_2, x_3 količine proizvoda A, B i C

d_1^-, d_1^+ podbačaj i prebačaj dobiti

d_2^-, d_2^+ podbačaj i prebačaj emisije štetnih materija

Na osnovu ograničenja i definisanih promenljivih formuliše se sledeći model ciljnog programiranja:

$$x_1, x_2, x_3, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{2} x_3 \leq 15$$

$$\frac{1}{3} x_1 + x_2 + 2 x_3 = 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$2x_2 + x_3 \geq 18$$

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + d_1^- - d_1^+ = 48$$

$$2x_1 + 8x_2 + 5x_3 + d_2^- - d_2^+ = 70$$

Funkcija kriterijuma formirana na osnovu penala (ili tzv. kaznenih poena) koji se dodeljuju samo podbačaju kod dobiti, odnosno, samo prebačaju kod emisije štetnih materija glasi:

$$7d_1^- + 2d_2^+ = z \rightarrow \min$$

Početna simpleks tabela:

	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	
d_1	1	1	1/2	0	0	0	0	15
v_2	1/3	1	2	0	0	0	0	12
d_3	2	3	0	0	0	0	0	30
d_4	0	-2	-1	0	0	0	0	-18
v_5	3	4	6	1	-1	0	0	48
v_6	2	8	5	0	0	1	-1	70
$-z$	0	0	0	-7	0	0	-2	0

Optimalno rešenje modela ciljnog programiranja glasi:

$$x_1=36/19, \quad x_2=156/19, \quad x_3=30/19$$

$$d_1^+=0, \quad d_1^-=0, \quad d_2^+=140/19, \quad d_2^-=0,$$

$$z_{\min}=280/19.$$

Ovo rešenje se predlaže kao kompromisno rešenje početnog modela višekriterijskog programiranja, pri čemu je $z_1=48$, znači za prvi kriterijum ostvarena je ciljna veličina, po drugom kriterijumu je prebačaj za $d_2^+=140/19$, znači $z_2=70+140/19=77,37$.

PRIMER 99. Za model:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 20 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 15 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= z_1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= z_2 \end{aligned}$$

odredite kompromisno rešenje metodom ciljnog programiranja! Ciljna veličina za z_1 je 40, svaka jedinica podbačaja se penalizira sa 2 poena; ciljna veličina za z_2 je 10, a svaka jedinica prebačaja se penalizira sa 3 poena.

R 99.

	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	
v_1	1	2	(1)	0	0	0	0	20
d_2	-3	-1	-2	0	0	0	0	-15
v_3	2	2	1	1	-1	0	0	40
v_4	1	2	-1	0	0	1	-1	10
	0	0	0	-2	0	0	-3	0
	x_1	x_2	v_1	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	
x_3	1	2		0	0	0	0	20
d_2	-1	3		0	0	0	0	25
v_3	1	0		1	-1	0	0	20
v_4	2	4		0	0	(1)	-1	30
	0	0		-2	0	0	-3	0
	x_1	x_2	v_1	d_1^-	d_1^+	v_4	d_2^+	
x_3	1	2		0	0		0	20
d_2	-1	3		0	0		0	25
v_3	(1)	0		1	-1		0	20
d_2^-	2	4		0	0		-1	30
	0	0		-2	0		-3	0
	v_3	x_2	v_1	d_1^-	d_1^+	v_4	d_2^+	
x_3		2		-1	1		0	0
d_2		3		1	-1		0	45
x_1		0		1	-1		0	20
d_2^-		4		(-2)	2		-1	-10
		0		-2	0		-3	0
	v_3	x_2	v_1	d_2^-	d_1^+	v_4	d_2^+	
x_3		0		-1/2	0		1/2	5
d_2		5		1/2	0		-1/2	40
x_1		2		1/2	0		-1/2	15
d_1^-		-2		-1/2	-1		1/2	5
		-4		-1	-2		-2	10

Rešenje modela je:

$$x_1=15, \quad x_2=0, \quad x_3=5, \quad z_1=35, \quad z_2=10,$$

$$d_1^- = 5, \quad d_1^+ = 0, \quad d_2^- = 0, \quad d_2^+ = 0, \text{ dodeljuje se ukupno 10 poena penala.}$$

ZADACI ZA VEŽBE

1. ZADATAK

Odredite skup mogućih rešenja, kriterijumski skup, skup efikasnih rešenja i ideal za model:

$$\begin{aligned}x_1, x_2 &\geq 0 \\x_1 &\leq 4 \\2x_1 + x_2 &\leq 10 \\-x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\10x_1 + 3x_2 &= z_1 \rightarrow \max \\x_1 + 10x_2 &= z_2 \rightarrow \max\end{aligned}$$

2. ZADATAK

Odredite sva efikasna bazna rešenja za model:

$$\begin{aligned}x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 10 \\x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\x_3 &\leq 5 \\3x_1 + x_2 + x_3 &= z_1 \rightarrow \max \\x_1 - x_2 + 2x_3 &= z_2 \rightarrow \max \\x_1 + 2x_2 &= z_3 \rightarrow \max\end{aligned}$$

3. ZADATAK

Dat je model višekriterijumskog programiranja:

$$\begin{aligned}x_1, x_2 &\geq 0 \\2x_1 + 2x_2 &\geq 1200 \\x_1 &\leq 900 \\2x_1 + 3x_2 &\leq 1800 \\x_1 + x_2 &= z_1 \rightarrow \max \\x_1 + 4x_2 &= z_2 \rightarrow \min\end{aligned}$$

1. Odredite skup mogućih rešenja, skup efikasnih rešenja, kriterijumski skup i ideal!
2. Navedite model ciljnog programiranja i objasnite njegovu suštinu!

4. ZADATAK

Za dati model višekriterijumskog programiranja:

1. Utvrdite i analizirajte skup mogućih rešenja!
2. Odredite skup efikasnih rešenja, kriterijumski skup i ideal!
3. Na osnovu modela **1.** i sledećih podataka postavite model ciljnog programiranja i polaznu simpleks tabelu:
 - ciljna veličina za z_1 je 30, svaka jedinica podbačaja se penalizira sa 2 poena
 - ciljna veličina za z_2 je 20, a svaka jedinica prebačaja se penalizira sa 3 poena

$$\begin{aligned}
x_1, x_2 &\geq 0 \\
3x_1 + 3x_2 &\geq 90 \\
x_1 &\leq 30 \\
-5x_1 + 2x_2 &\leq 60 \\
x_1 + x_2 &= z_1 \rightarrow \max \\
x_1 + 2x_2 &= z_2 \rightarrow \min
\end{aligned}$$

5. ZADATAK

U jednoj fabrici proizvode se proizvodi A_i ($i=1,2,3,4,5$). U sledećoj tabeli dati su podaci o kapacitetima mašina M_1 , M_2 i M_3 (u časovima) za dati vremenski period, tehnički koeficijenti (utrošak mašinskih časova po jedinici proizvoda), dobitak (u novčanim jedinicama po jedinici proizvoda) i težina proizvoda (u kg po jedinici proizvoda):

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	KAPACITETI
M_1	2	0	2	2	2	480
M_2	0	1	1	0	1	150
M_3	2	2	0	4	2	600
DOBITAK	4	4	4	6	6	
TEŽINA	6	2	3	2	7	

1. Odredite optimalni proizvodni program uz strogu preferenciju ciljeva! Cilj prvog ranga je maksimalni dobitak, a drugog minimalna ukupna težina proizvoda.
2. Da li postoji savršeno rešenje modela 1.? Odgovor obrazložite i za dobijeno rešenje izvršite ekonomsku analizu!
3. Ciljna veličina za funkciju dobiti je 800 novčanih jedinica, svaka jedinica podbačaja se penalizira sa 3 poena. Ciljna veličina za ukupnu težinu iznosi 400 kg i prebačaj se penalizira sa 2 poena. Na osnovu ovih informacija i ostalih podataka postavite model ciljnog programiranja i odgovarajuću simpleks tabelu!

6. ZADATAK

Za dati model višekriterijumskog programiranja:

1. Odredite skup mogućih rešenja, kriterijumski skup, skup efikasnih rešenja i ideal!
2. Šta je ciljno programiranje (objasnite suštinu i navedite model)?
3. Definišite efikasno rešenje, savršeno rešenje i ideal!

$$\begin{aligned}
x_1, x_2 &\geq 0 \\
7x_1 + 2x_2 &\leq 1400 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 600 \\
-x_1 + x_2 &\leq 200 \\
x_1 &\leq 200 \\
x_1 + x_2 &= z_1 \rightarrow \max \\
10x_1 + 2x_2 &= z_2 \rightarrow \max
\end{aligned}$$

7. ZADATAK

Dat je model višekriterijumskog programiranja:

$$\begin{aligned}
x_1, x_2 &\geq 0 \\
x_1 + x_2 &\leq 40 \\
x_1 - x_2 &\leq 40 \\
4x_1 &\geq 80 \\
2x_1 + 4x_2 &= z_1 \rightarrow \max \\
3x_1 + x_2 &= z_2 \rightarrow \min
\end{aligned}$$

1. Odredite skup mogućih rešenja, kriterijumski skup, skup efikasnih rešenja i ideal!
2. Na osnovu modela 1. i sledećih podataka postavite model ciljnog programiranja i polaznu simpleks tabelu: ciljna veličina za z_1 je 120, svaka jedinica podbačaja penalizira se sa 2 poena; ciljna veličina za z_2 je 60 i svaka jedinica prebačaja penalizira se sa 3 poena!

8. ZADATAK

Dat je model višekriterijumskog programiranja:

$$\begin{aligned}
x_1, x_2 &\geq 0 \\
x_1 - x_2 &\geq -10 \\
2x_1 - x_2 &\leq 20 \\
x_1 + 2x_2 &\geq 20 \\
3x_1 + 3x_2 &= z_1 \rightarrow \max \\
x_1 + x_2 &= z_2 \rightarrow \min
\end{aligned}$$

1. Utvrdite skup mogućih rešenja i analizirajte ga!
2. Odredite skup efikasnih rešenja, kriterijumski skup i ideal!
3. Navedite: - model standardnog problema maksimuma
- model ciljnog programiranja
4. Rešite model simpleks algoritmom, uz strogu preferenciju ciljeva: z_1 je cilj prvog a z_2 cilj drugog ranga. Analizirajte rešenje!

9. ZADATAK

1. Rešite grafički i primenom simpleks metoda sledeći model:

$$\begin{aligned}
x_1, x_2 &\geq 0 \\
5x_1 - x_2 &\geq 60 \\
x_1 + x_2 &\leq 20 \\
x_1 &\geq 13 \\
5x_1 + 10x_2 &= z \rightarrow \max
\end{aligned}$$

2. Napišite dual modela 1. i odredite i objasnite dualno rešenje!
3. Model 1. je proširen sa funkcijom kriterijuma:

$$20x_1 - 20x_2 = z_2 \rightarrow \min$$

Odredite kriterijumski skup, ideal i skup efikasnih rešenja! Rešite model simpleks algoritmom, ako su ciljevi rangirani, z_1 je cilj prvog a z_2 cilj drugog ranga!

4. Navedite model ciljnog programiranja!
5. Kako se primećuje u simpleks tabeli da problem nema moguće rešenje?

10. ZADATAK

U jednom pogonu planira se proizvodnja dva proizvoda, A i B. Kapacitet pogona je 300 časova, a za jedinicu proizvoda potrebno ja angažovati 2 odnosno 3 časa. Za proizvodnju

proizvoda A i B koristi se sirovina S i to po 2 kg/jed., raspoloživa količina S je 180 kg. Ukupna dnevna proizvodnja treba da iznosi najmanje 80 jedinica.

1. Odredite optimalni program proizvodnje ako su postavljena dva cilja:
 - maksimalni obim proizvodnje, kao cilj prvog ranga i
 - maksimalno korišćenje kapaciteta pogona – kao cilj drugog ranga.
2. Da li postoji savršeno rešenje?
3. Definišite: - skup mogućih rešenja
- skup efikasnih rešenja
- kriterijumski skup
- ideal

11. ZADATAK

Dat je model višekriterijumskog programiranja:

$$\begin{aligned}x_1, x_2 &\geq 0 \\2x_1 + 2x_2 &\leq 600 \\-x_1 + 4x_2 &\leq 400 \\2x_1 &\geq 320 \\2x_1 + 4x_2 &= z_1 \rightarrow \min \\6x_1 + 2x_2 &= z_2 \rightarrow \max\end{aligned}$$

1. Odredite skup mogućih rešenja, kriterijumski skup, skup efikasnih rešenja i ideal!
2. Šta je savršeno rešenje? Da li postoji takvo rešenje za model 1.?
3. Ciljna veličina za z_1 je 300, svaka jedinica prebačaja se penalizuje sa 6 poena; ciljna veličina za z_2 je 1800 poena, svaka jedinica podbačaja se penalizuje sa 2 poena. Na osnovu ovih informacija i modela pod 1. postavite model ciljnog programiranja i odgovarajuću polaznu simpleks tabelu!

12. ZADATAK

Za jednu fabriku treba sačiniti plan proizvodnje za proizvode A i B.

U proizvodnji se koristi sirovina S, od koje se mora preraditi najmanje 200 tona mesečno; za proizvodnju proizvoda A i B koristi se redom 2 t i 1 t.

Mesečni kapacitet postrojenja je 160 časova, za proizvodnju proizvoda A i B koristi se redom 1 č i 2 č.

Zbog tržišnih uslova treba proizvoditi najmanje 100 jedinica proizvoda B.

1. Odredite optimalni mesečni plan proizvodnje uz maksimalni prihod! Prodajne cene su redom 3 i 5 novčanih jedinica. Model rešite grafički i simpleks algoritmom.
2. Navedite dual modela 1. Ima li dual moguće, odnosno optimalno rešenje? Objasnite stav egzistencije optimuma linearnog modela!
3. Kapacitet postrojenja je proširen na 400 časova mesečno. Odredite novo rešenje! Analizirajte optimalno rešenje i skup mogućih rešenja!
4. Definisana je još jedan cilj: maksimalni obim proizvodnje. Odredite kriterijumski skup, skup efikasnih rešenja i ideal!
5. Da li postoji savršeno rešenje za model 4.? Odgovor obrazložite.
6. Umesto prethodne dve funkcije kriterijuma definisana je sledeća nelinearna funkcija troškova:

$$3x_1^2 - 5x_1 + 5x_2^2 + 10x_2 = v \rightarrow \min$$

Uslovi su u odnosu na model 3. nepromenjeni. Izvršite linearnu aproksimaciju za dobijeni model, postavite polaznu simpleks tabelu i navedite jedno moguće rešenje!

13. ZADATAK

Dat je model višekriterijumskog programiranja:

$$\begin{aligned}x_1, x_2 &\geq 0 \\x_1 + 2x_2 &\geq 40 \\3x_1 + 2x_2 &\leq 60 \\-x_1 + x_2 &\leq 20 \\x_1 &\leq 20 \\x_1 + x_2 &= z_1 \rightarrow \max \\10x_1 + 2x_2 &= z_2 \rightarrow \min\end{aligned}$$

1. Utvrdite skup mogućih rešenja, kriterijumski skup, skup efikasnih rešenja i ideal!
2. Na osnovu modela **1.** i sledećih podataka postavite model ciljnog programiranja i polaznu simpleks tabelu:
 - ciljna veličina za z_1 je 30, svaka jedinica podbačaja se penalizira sa 3 poena;
 - ciljna veličina za z_2 je 80, a svaka jedinica prebačaja se penalizira sa 5 poena.

14. ZADATAK

Potrebno je odrediti optimalni plan proizvodnje dva proizvoda (A i B) u jednom pogonu. Uslovi proizvodnje i prodaje su sledeći:

- a) Dnevno se može plasirati najviše 20 komada proizvoda A.
- b) Broj komada proizvoda A mora biti najmanje za 40 veći od broja komada proizvoda B.
- c) Za proizvodnju oba proizvoda potrebna je sirovina S, i to 2 odnosno 1 kg po komadu. Potrebno je preraditi najmanje 120 kg sirovine dnevno.
- d) Prodajne cene su 6 odnosno 2 novčana jedinica po komadu, redom.

1. Odredite optimalni program proizvodnje uz maksimalni prihod! Model rešite grafički i simpleks metodom.
2. Napišite dual modela iz tačke **1.** Ima li dual optimalno ili moguće rešenje?
3. Plasmanski uslov pod a) je promenjen: potrebno je obezbediti najmanje 20 komada proizvoda A. Rešite modifikovani model!
4. Na osnovu tačaka **2.** i **3.** objasnite stav egzistencije optimuma za primarni i dualni model!
5. Model formulisan pod **3.** proširen je ograničenjem za proizvod A, tako da je pored donjeg, postavljen i gornji plasmanski limit u količini 80 komada. Odredite skup mogućih rešenja grafički. Analizirajte skup **M**!
6. Za model u tački **5.** definisana je još jedna funkcija kriterijuma: $x_1 + x_2 = z \rightarrow \max$. Na osnovu skupa ograničenja i obe funkcije kriterijuma odredite skup efikasnih rešenja, kriterijumski skup i ideal!
7. Da li postoji savršeno rešenje za model **6.**? Obrazložite odgovor!

15. ZADATAK

U jednom pogonu proizvode se dva proizvoda: A i B. Proizvodnja se odvija pod sledećim uslovima:

- a) Za proizvode A i B koristi se sirovina S, od koje na raspolaganju stoji 190 kg (ne mora se sav utrošiti). Za jednu jedinicu proizvoda A i B potrebno je po 1 kg sirovine S
- b) Oba proizvoda obrađuju se na mašini M. Kapacitet ove mašine u planskom periodu iznosi 300 časova i koristi se u bilo kom stepenu. Za jednu jedinicu A i B potrebno je utrošiti 1 odnosno 2 časa respektivno.

c) Zbog ograničenosti tražnje za proizvodom A od ovog proizvoda može se proizvesti najviše 90 jedinica.

d) Radi boljeg iskorišćenja kapaciteta od proizvoda B treba proizvesti najmanje 20 jedinica.

1. Postavite model ako je cilj maksimalni prihod i ako je funkcija prihoda sledećeg oblika:

$$z = 1800x_1 - 2x_1^2 + 10x_2, \text{ gde } x_i \text{ označava broj proizvedenih jedinica proizvoda A i B.}$$

Postavite model, izvršite linearizaciju (birajući tri jednaka podintervala) i postavite polaznu simpleks tabelu!

2. Na koji način se može postići u principu veća tačnost u zadatku pod 1.?

3. Transformišite model 1. u model kvadratnog programiranja, postavite polaznu simpleks tabelu i navedite kriterijume optimalnosti!

4. Navedite prednosti i nedostatke metoda linearne aproksimacije i kvadratnog programiranja!

5. U modelu koji ste formulisali pod 1., datu nelinearnu funkciju kriterijuma zamenite sa sledeće dve linearne: $3x_1 + 2x_2 = z_1 \rightarrow \max$ i $x_1 + x_2 = z_2 \rightarrow \max$. Utvrdite skup mogućih rešenja, skup efikasnih rešenja, kriterijumski skup i ideal!

16. ZADATAK

Jedna fabrika proizvodi 4 artikla (A, B, C i D) pod sledećim uslovima:

	ARTIKLI				KAPACITETI
	A	B	C	D	
SIROVINA (kg/kom.)	4	6	2	2	1800 kg
MAŠINA 1 (čas/kom.)	0	4	1	2	1600 čas
MAŠINA 2 (čas/kom.)	2	1	2	3	1000 čas
PRODAJNE CENE (n.j./kom.)	250	300	200	150	
PROPORCIONALNI TROŠKOVI (n.j./kom.)	25	30	30	20	

1. Odredite optimalni plan proizvodnje uz maksimalnu ekonomičnost uzimajući u obzir još i sledeće uslove:

- svu raspoloživu sirovinu treba preraditi
- od proizvoda A može se plasirati najviše 100 komada
- fiksni troškovi iznose 20000 n.j.

2. Postavite model ciljnog programiranja i odgovarajuću simpleks tabelu na osnovu podataka iz tačke 1. i sledećih informacija:

CILJEVI	CILJNE VELIČINE	PENALI	
		ZA PREBAČAJ	ZA PODBAČAJ
z_1 : maksimalni prihod	300.000	-	5 poena
z_2 : minimum proporcionalnih troškova	25.000	3 poena	-

17. ZADATAK

Dat je model višekriterijumskog programiranja:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 \geq 60$$

$$x_2 \leq 40$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 80$$

$$3x_1 + 4x_2 = z_1 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 = z_2 \rightarrow \min$$

1. Odredite i analizirajte skup mogućih rešenja!
2. Odredite skup efikasnih rešenja, kriterijumski skup i ideal!
3. Da li postoji savršeno rešenje za model 1.? Obrazložite odgovor!
4. Na osnovu modela 1. i sledećih podataka postavite model ciljnog programiranja i odgovarajuću polaznu simpleks tabelu: ciljna veličina za z_1 je 380, svaka jedinica podbačaja se penalizira sa 5 poena; ciljna veličina za z_2 je 110, svaka jedinica prebačaja penalizira se sa 2 poena.
5. Odredite jedno efikasno bazno rešenje simpleks algoritmom!

18. ZADATAK

Dat je model višekriterijumskog programiranja:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 300$$

$$x_1 - 4x_2 \geq -400$$

$$2x_2 \geq 100$$

$$2x_1 + 4x_2 = z_1 \rightarrow \min$$

$$6x_1 + 2x_2 = z_2 \rightarrow \max$$

1. Odredite skup mogućih rešenja, kriterijumski skup, skup efikasnih rešenja i ideal!
2. Šta je savršeno rešenje? Da li postoji takvo rešenje za model 1.?
3. Ciljna veličina za z_1 je 300, svaka jedinica prebačaja se penalizuje sa 6 poena; ciljna veličina za z_2 je 1800 poena, svaka jedinica podbačaja se penalizuje sa 2 poena. Na osnovu ovih informacija i modela pod 1. postavite model ciljnog programiranja i odgovarajuću polaznu simpleks tabelu!
4. Odredite jedno efikasno bazno rešenje primenom simpleks algoritma!

19. ZADATAK

U jednoj fabrici treba odrediti optimalni plan proizvodnje dva proizvoda A i B. Uslovi proizvodnje i prodaje su sledeći:

- a) Za proizvodnju oba proizvoda potrebna je sirovina S i to u količinama 2 odnosno 1 kg po komadu. Treba preraditi najmanje 320 kg sirovine S dnevno.
- b) Od proizvoda A može se plasirati najviše 80 komada dnevno.
- c) Broj komada A mora biti najmanje za 100 veći od broja komada B.
- d) Prodajne cene su 3 odnosno 1 novčana jedinica po komadu redom.

1. Odredite optimalni proizvodni program uz maksimalni prihod. Model rešite grafički i simpleks metodom!
2. Navedite dual modela 1.! Da li ima dualni model optimalno odnosno moguće rešenje?
3. Promenjen je plasmanski uslov (uslov pod b) za proizvod A: potrebno je obezbediti najmanje 80 komada. Rešite modifikovani model!
4. Na osnovu tačke 2. i 3. objasnite stav egzistencije optimuma za primarni odnosno dualni model!
5. Za proizvod A određen je gornji plasmanski limit 200 komada. Ostali uslovi su isti kao i u modelu 3. Odredite skup mogućih rešenja grafički!

6. Za model 5. definisana je još jedna funkcija kriterijuma: $x_1 + x_2 = z_2 \rightarrow \min$.

Uzimajući u obzir obe funkcije kriterijuma odredite skup efikasnih rešenja, kriterijumski skup i ideal!

7. Da li postoji savršeno rešenje za model 6? (Objasnite odgovor)

8. Na osnovu modela 5. i 6. i sledećih podataka postavite model ciljnog programiranja i odgovarajuću simpleks tabelu:

- ciljna veličina za z_1 je 700, svaka jedinica podbačaja se penalizira sa 10 poena;

- ciljna veličina za z_2 je 100, a svaka jedinica prebačaja se penalizira sa 2 poena!

20. ZADATAK

Jedna fabrika proizvodi dva proizvoda A i B pod sledećim uslovima:

IZVORI ENERGIJE	Tehnički koeficijenti		KAPACITETI	Ciljne veličine	Penali za podbačaj	Penali za prebačaj
	A	B				
Mašina I	2 čas/kom	2 čas/kom.	100 čas			
Mašina II	4 čas/kom	2 čas/kom.	120 čas			
Mašina III	2 čas/kom	0	40 čas			
Prod. cene	60 n.j.	20 n.j.		1500	5	-
Troškovi po proizvodu	4 n.j.	3 n.j.		1000	-	3

1. Formulirajte model višekriterijumskog programiranja, ako su ciljevi maksimalni prihod i minimalni ukupni troškovi!

2. Odredite skup mogućih rešenja, kriterijumski skup, ideal i skup efikasnih rešenja!

3. Postavite model ciljnog programiranja i odgovarajuću polaznu simpleks tabelu!

21. ZADATAK

Jedan pogon može da proizvodi tri artikla: A_1 , A_2 i A_3 . Tehnički koeficijenti i podaci o kapacitetima dati su u sledećoj tabeli:

IZVORI ENERGIJE	Tehnički koeficijenti			Kapaciteti
	A_1	A_2	A_3	
Mašina M_1	1 čas/kom.	2 čas/kom.	4 čas/kom.	220 čas
Mašina M_2	1 čas/kom.	1 čas/kom.	1 čas/kom.	160 čas
Sirovina S	2 kg/kom.	1 kg/kom.	2 kg/kom.	∞

Pri utvrđivanju plana proizvodnje treba uzeti u obzir:

a) od sirovine S treba preraditi najmanje 200 kg

b) treba ostvariti minimalne troškove, a troškovi po jedinici proizvoda iznose 980, 940 i 950 din/kom respektivno.

1. Odredite i analizirajte optimalno rešenje!

2. Odredite interval stabilnosti rešenja 1. obzirom na očekivana kolebanja proporcionalnih troškova!

3. Da li se menja optimalni asortiman 1. ako se za cilj uzima maksimalna ekonomičnost? Fiksni troškovi iznose 20000 din, a prodajne cene su 1500, 1200 i 1500 din/kom. respektivno.

