

## Primer za vežbu 2 – Ekonometrija

Dati su podaci o godišnjim vrednostima sledećih pojava u Tabeli 1.

**Tabela 1.**

t	BELEX 15 $Y_t$	Inflacija $X_{t2}$	Kamatna stopa $X_{t3}$	$Y_{t2}$	$X_{t2}^2$	$X_{t3}^2$	$Y_t X_{t2}$	$Y_t X_{t3}$	$X_{t2} X_{t3}$
1	1521	9.12	16.89	2313441	83.17	285.27	13871.52	25689.69	154.0368
2	1897	9.38	15.98	3598609	87.98	255.36	17793.86	30314.06	149.8924
3	2012	10.27	17.12	4048144	105.47	293.09	20663.24	34445.44	175.8224
4	1901	11.28	17.56	3613801	127.24	308.35	21443.28	33381.56	198.0768
5	2109	9.17	16.05	4447881	84.09	257.60	19339.53	33849.45	147.1785
6	2358	8.24	15.36	5560164	67.90	235.93	19429.92	36218.88	126.5664
7	2045	7.91	12.58	4182025	62.57	158.26	16175.95	25726.10	99.5078
8	2248	9.54	13.27	5053504	91.01	176.09	21445.92	29830.96	126.5958
9	2569	7.63	12.27	6599761	58.22	150.55	19601.47	31521.63	93.6201
10	3045	7.24	11.39	9272025	52.42	129.73	22045.80	34682.55	82.4636
11	2548	7.11	10.81	6492304	50.55	116.86	18116.28	27543.88	76.8591
12	3159	6.82	10.99	9979281	46.51	120.78	21544.38	34717.41	74.9518
13	3897	7.58	9.18	15186609	57.46	84.27	29539.26	35774.46	69.5844
14	4518	6.47	9.81	20412324	41.86	96.24	29231.46	44321.58	63.4707
15	4781	5.58	8.62	22857961	31.14	74.30	26677.98	41212.22	48.0996
$\Sigma$	40608	123.34	197.88	123617834	1047.59	2742.7	316919.85	499229.87	1686.73

- 1) Izraditi dijagrame rasturanja parova podataka Y i  $X_2$ , kao i Y i  $X_3$ . Ispitati o kakvom se obliku, smeru i jačine veze radi između navedenih promenljivih.
- 2) Oceniti model sledećeg oblika:  $Y_t = b_1 + b_2 \cdot X_{t2} + u_t$  i objasniti ocenjene vrednosti parametara.
- 3) Testirati statističku značajnost ocenjenih parametara ako je  $t(1\%, 13) = 3,012$   $t(5\%, 13) = 2,16$
- 4) Odrediti intervalne ocene parametara
- 5) Izračunati i objasniti koeficijent determinacije
- 6) Na osnovu podatka za  $X_{16,2} = 5,4$  izračunati predviđenu vrednost za BELEX15 kao jedinstvenu veličinu i interval.
- 7) Testirati moć predviđanja datog modela za 5% rizika greške i  $Y_{16} = 4820$ .
- 8) Oceniti regresioni model sledećeg oblika  $Y_t = b_1 + b_2 \cdot X_{t2} + b_3 \cdot X_{t3} + u_t$  i protumačiti ocenjene parametre.
- 9) Testirati statističku značajnost ocenjenih parametara ako je  $t(1\%, 12) = 3,055$   $t(5\%, 12) = 2,179$
- 10) Ispitati opravdanost uvođenja regresora  $X_3$  u model prema stepenu objašnjenosti.
- 11) Ispitati opravdanost uvođenja regresora  $X_3$  u model prema informacionim kriterijumima.
- 12) Testirati moć predviđanja ocenjenog modela u tački 8, ako su  $Y_{16} = 4820$ ,  $X_{16,2} = 5,4$ ,  $X_{16,3} = 8,5$  i pri riziku greške od 5%.

Dati su sledeći modeli:

$$\ln \hat{Y}_t = -1.205 + 1.221 \cdot \ln X_{t2}$$

$$\ln \hat{Y}_t = 1.844 + 0.0601 \cdot X_{t2}$$

13) Odrediti nazive ovih modela u originalnom obliku

14) Napisati početne oblike ovih modela

15) Objasniti značenje ocenjenih parametara u ovim modelima

Dat je sledeći model:

$$\ln\left(\frac{\hat{Y}_t}{5500 - \hat{Y}_t}\right) = -1.921 + 0.0066 \cdot X_{t2}$$

16) Oceniti kada počinje usporeni rast vrednosti BELEX15

17) Oceniti nivo saturacije vrednosti BELEX15 pri nivou inflacije od 5%

18) Za koji nivo inflacije se postiže 80% saturacije vrednosti BELEX15

Dati su sledeći podaci o rezidualima ocenjenog modela  $\hat{Y}_t = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \cdot X_{t2}$  u Tabeli 2.

**Tabela 2.**

t	Y <sub>t</sub>	X <sub>t2</sub>	X <sub>t3</sub>	e <sub>t</sub>	e <sub>t-1</sub>	e <sub>t</sub> e <sub>t-1</sub>
1	1521	9.12	16.89	-729.92		
2	1897	9.38	15.98	-221.71	-729.92	161829.54
3	2012	10.27	17.12	345.84	-221.71	-76677.14
4	1901	11.28	17.56	748.42	345.84	258836.52
5	2109	9.17	16.05	-116.49	748.42	-87184.83
6	2358	8.24	15.36	-340.39	-116.49	39652.33
7	2045	7.91	12.58	-821.19	-340.39	279520.83
8	2248	9.54	13.27	210.65	-821.19	-172981.86
9	2569	7.63	12.27	-439.56	210.65	-92593.49
10	3045	7.24	11.39	-161.87	-439.56	71154.17
11	2548	7.11	10.81	-724.98	-161.87	117355.38
12	3159	6.82	10.99	-261.44	-724.98	189537.84
13	3897	7.58	9.18	863.01	-261.44	-225625.29
14	4518	6.47	9.81	919.59	863.01	793616.51
15	4781	5.58	8.62	730.04	919.59	671332.76
Σ	40608.00	123.34	197.88	0.00	-730.04	1927773.27

- 19) Preko dijagrama vremenski raspoređenih reziduala odrediti postojanje autokorelacije.
- 20) Preko dijagrama rasturanja parova podataka reziduala ispitati postojanje autokorelacije reziduala.
- 21) Primenom DW testa ispitati postojanje autokorelacije reziduala  $d_d=1,077$  i  $d_g=1,361$
- 22) Izračunati koeficijent autokorelacije. Šta na osnovu dobijene vrednosti možemo reći o prisutnosti autokorelacije reziduala?
- 23) Izvršiti otklanjanje štetnih efekata autokorelacije reziduala u modelu primenom prvih diferenci i kvazi diferenci.
- 24) Grafičkim putem ispitati postojanje heteroskedastičnosti reziduala u odnosu na promenljivu  $X_2$ .
- 25) Primenom neparametarskog testa koeficijenta korelacije ranga ispitati postojanje heteroskedastičnosti reziduala ako je tablična vrednost za 5% rizika greške 1,96.
- 26) Otkloniti heteroskedastičnost reziduala iz modela primenom metoda ponderisanih najmanjih kvadrata i logaritamske transformacije.
- 27) Ispitati postojanje multikolinearnosti u modelu sa dva regresora (tačka 8) poređenjem vrednosti koeficijenta determinacije i ocenjenih vrednosti parametara.

- 28) Ispitati postojanje multikolinearnosti u modelu sa dva regresora (tačka 8) poređenjem koeficijenata korelacije ako su poznati podaci  $y_t^2=13683856.4$ ,  $x_{12}^2=33.41$ ,  $x_{13}^2=132.26$ ,  $y_t x_{12}=-16986.2$ ,  $y_t x_{13}=-36470.87$  i  $x_{12} x_{13}=59.62$
- 29) Testiranjem determinante korelacione matrice utvrditi postojanje multikolinearnosti regresora ako je  $\chi^2(5\%,1)=3.84$
- 30) Otkloniti multikolinearnost regresora primenom Ridž regresije ako je  $\lambda=100$

U vremenu trajanja posmatranog uzorka došlo je do značajne promene u vrednosti promenljive Y.

**Tabela 3.**

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Y_t$	820	825	840	860	890	2358	2045	2248	2569	3045	2548	3159	3897	4518	4781
$X_{t2}$	9.12	9.38	10.27	11.28	9.17	8.24	7.91	7.54	7.63	7.24	7.11	6.82	7.58	6.47	5.58

- 31) Grafički odrediti da li postoje dva odvojena potperioda u razvoju BELEX15
- 32) Na osnovu informacija iz prethodne tačke prikazati vrednosti veštačke promenljive za svaku jedinicu osmatranja u pomenutom uzorku.
- 33) Sa uključivanjem veštačke promenljive ocenjen je model za ceo uzorak  $\hat{Y}_t = 7922.6 - 442.32 \cdot X_{t2} + 254.66 \cdot V_t$  kako glase modeli za dva potperioda?
- 34) Ocenjeni su sledeći modeli: za ceo uzorak  $\hat{Y}_t = 5827.44 - 396.32 \cdot X_{t2}$   $e_t^2 = 6154255$ , za prvi period  $\hat{Y}_t = 6511.13 - 422.3 \cdot X_{t2}$   $e_t^2 = 511202$  i za drugi potperiod  $\hat{Y}_t = 1152.13 - 12.45 \cdot X_{t2}$   $e_t^2 = 621.55$ . Primenom Chow testa potvrditi postojanje značajne razlike između dva perioda ako je  $F(1\%,2,11)=7.21$ .
- 35) Ako je ocenjen model  $\hat{Y}_t = 1690.53 - 55.802 \cdot X_{t2} + 184.439 \cdot t$   $\bar{R}^2 = 0.7982$  ispitati prema stepenu objašnjenosti da li je opravdano uključivanje vremena u model u odnosu na model iz tačke 2?
- 36) Objasniti vrednosti ocenjenih parametara iz prethodne tačke.
- 37) Ocenjen je model  $\hat{Y}_t = 7327.33 - 364.69 \cdot X_{t2} - 145.47 \cdot X_{t-1}$  objasniti vrednosti parametara i izvršiti predviđanje za 16. godinu ako je  $X_{16,2}=5,5$
- 38) Pod pretpostavkom da je BELEX15 u funkciji tekuće inflacije i inflacije iz prethodna tri perioda ocenjeni su sledeći modeli:
- $\hat{Y}_t = 8850.09 - 177.69 \cdot V_t$  ponderi su jednaki
- $\hat{Y}_t = 8285.35 - 65.28 \cdot V_t$  aritmetički opadajući ponderi
- $\hat{Y}_t = 8498.18 - 111.12 \cdot V_t$  prvo rastući, pa opadajući ponderi
- $\hat{Y}_t = 8966.52 - 131.29 \cdot V_t - 32.44 \cdot Z_t$  ponderi prate polinomsku šemu prvog reda
- $\hat{Y}_t = 8425.36 - 264.03 \cdot V_t$  geometrijski opadajući ponderi sa količnikom progresije 0,7
- Za svaki od ocenjenih modela protumačiti vrednosti ocenjenih parametara i izvršiti predviđanje za 16. godinu pod pretpostavkom za vrednost inflacije iz tačke 37.

Dati su podaci za 810 osmatranja nedeljnih cena sirove nafte na svetskom tržištu i ocenjeni su sledeći modeli:

$$Y_t = 3,587 + 0,9914Y_{t-1} \quad AIC = 11,218 \quad SIC = 6,954 \quad R^2 = 0,939$$

$$Y_t = 2,894 + 0,9804 Y_{t-1} - 0,0287 u_{t-1} \quad AIC = 11,038 \quad SIC = 6,962 \quad R^2 = 0,938$$

$$Y_t = 2,134 + 0,9081 Y_{t-1} + 0,0976 Y_{t-2} \quad AIC = 11,039 \quad SIC = 6,931 \quad R^2 = 0,928$$

$$Y_t = 3,921 + 0,9172 Y_{t-1} + 0,0646 u_{t-1} - 0,0231 u_{t-2} \quad AIC = 11,038 \quad SIC = 6,812 \quad R^2 = 0,946$$

$$Y_t = 4,129 + 0,7394 Y_{t-1} + 0,1898 Y_{t-2} + 0,0792 Y_{t-3} - 0,0593 u_{t-1} \quad AIC = 11,021 \quad SIC = 6,821 \quad R^2 = 0,962$$

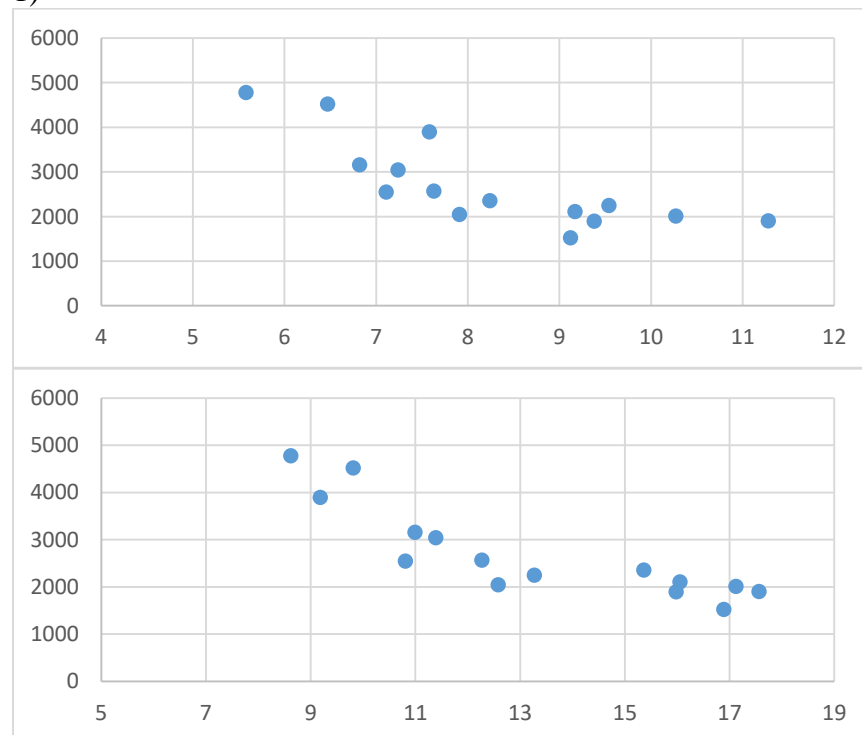
- 39) Na osnovu navedenih univarijacionih modela izaberite dva najbolja prema informacionim kriterijumima.
- 40) Izvršiti previđanje za naredna tri perioda ( $t = 811, 812, 813$ ) koristeći dva prethodno izabrana modela i na osnovu dole navedenih originalnih podataka za vrednosti indeksa i njihovih reziduala (Tabela 4).
- 41) Izračunati vrednosti MAE i MAPE za oba modela i dati konačnu odluku o tome koji model ima manje greške u predviđanju, ako se uzimaju podaci iz tabele 4?

**Tabela 4.**

t	$Y_t$ - cena nafte	$u_t$
808	99,25	3,25
809	101,27	- 0,69
810	100,12	4,85
811	102,29	
812	101,64	
813	102,97	

### Rešenja

1)



2)  $Y_t = 6888,321 - 508,4882 X_{t2}$

3)  $\sum e_t^2 = 5046574,8885 \quad \sigma^2 = 388198,0683 \quad S_1 = 900,884 \quad S_2 = 107,8001 \quad t_1 = 7,6462 \quad t_2 = -4,7169$

5)  $R^2 = 0,6312$

6)  $Y_{16p} = 4142,493$   $S_{16p} = 2250,9249$

7)  $t_p = 0,301$

8)  $Y_t = 6534,8441 - 83,5004 X_{t2} - 238,1025 X_{t3}$

9)  $\sum e_t^2 = 3581697,4878$   $\sigma^2 = 298474,7906$   $S_1 = 805,8971$   $S_2 = 213,8596$   $S_3 = 107,4774$   $t_1 = 8,1087$   $t_2 = -0,3904$   $t_3 = -2,2153$

10) Prvi model  $\bar{R}^2 = 0,6028$

Drugi model  $\bar{R}^2 = 0,6946$

11)  $l_1 = -116,73$   $l_2 = -114,159$   $AIC_1 = 15,8307$   $AIC_2 = 15,6212$

12)  $Y_{16p} = 4060,071$   $\underline{X}_s^T \cdot (\underline{X}^T \cdot \underline{X})^{-1} \cdot \underline{X}_s = 2,5548$   $t_p = 0,7377$

13) Stepeni i eksponencijalni model

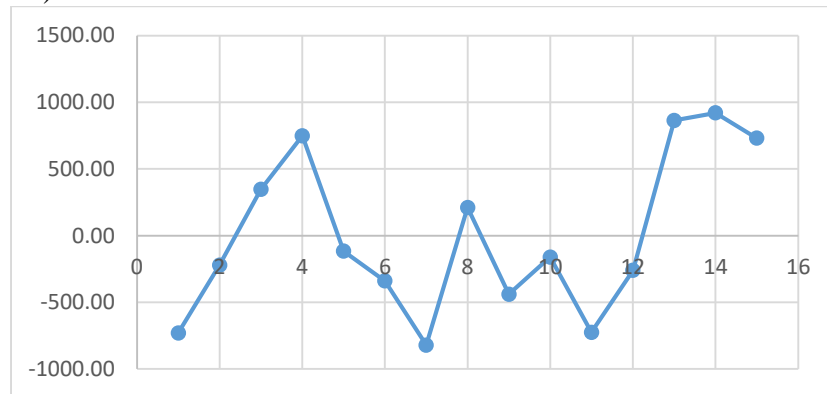
14)  $Y_t = 0,2997 X_{t2}^{1,221}$   $Y_t = 6,3218 \cdot 1,0619^{X_{t2}}$

16)  $-a/b = 291,0606$

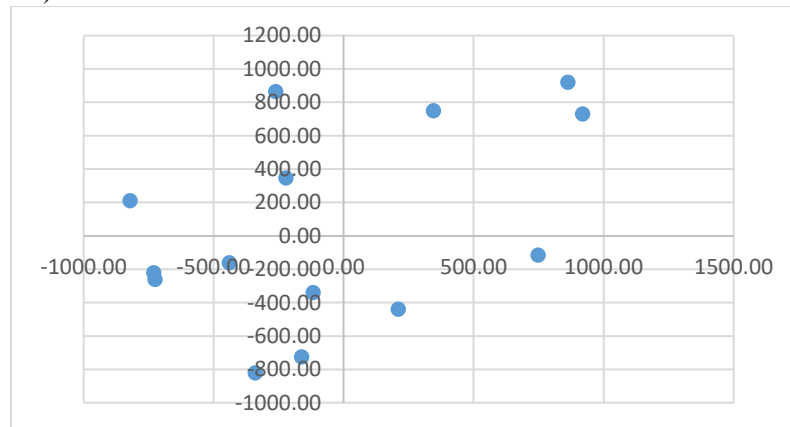
17)  $Y_t/s = 13,15\%$

18)  $X_{t2} = 501,1052$

19)



20)

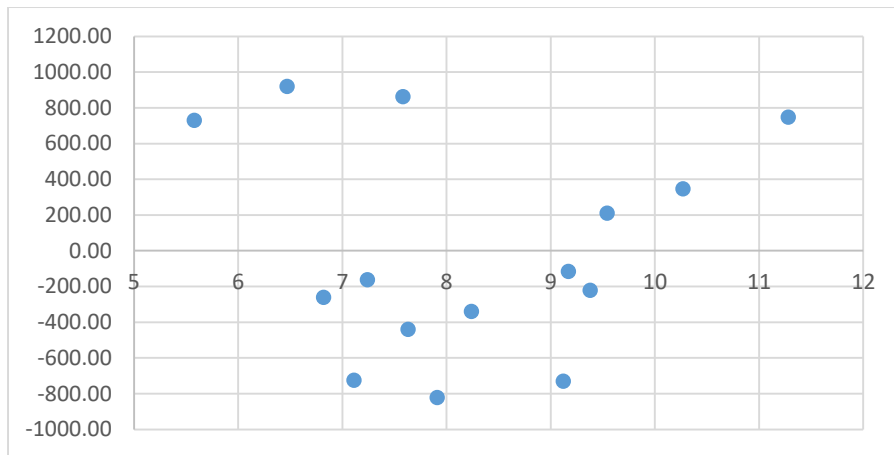


21)  $d = 1,1304$   $d_d = 1,077 < d < d_g = 1,361$

22)  $\rho = 0,4271$

23)  $\Delta Y_t = b \Delta X_{t2}$   $Y_t - 0,4576 Y_{t-1} = a (1 - 0,4576) + b (X_{t2} - 0,4576 X_{t2-1})$

24)



25)

t	BELEX 15	inflacija $X_{12}$	reziduali	rang $X_{12}$	rang $e_t$	$d^2$
1	1521	9.12	-729.92	10	10	0
2	1897	9.38	-221.71	12	4	64
3	2012	10.27	345.84	14	7	49
4	1901	11.28	748.42	15	12	9
5	2109	9.17	-116.49	11	1	100
6	2358	8.24	-340.39	9	6	9
7	2045	7.91	-821.19	8	13	25
8	2248	9.54	210.65	13	3	100
9	2569	7.63	-439.56	7	8	1
10	3045	7.24	-161.87	5	2	9
11	2548	7.11	-724.98	4	9	25
12	3159	6.82	-261.44	3	5	4
13	3897	7.58	863.01	6	14	64
14	4518	6.47	919.59	2	15	169
15	4781	5.58	730.04	1	11	100
zbir						728

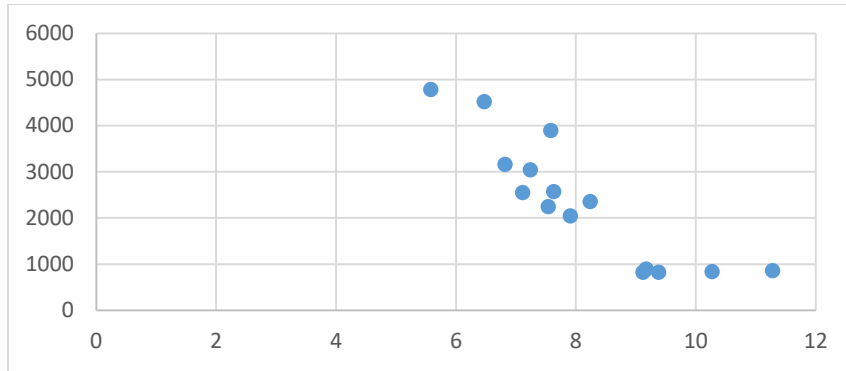
$$r_j = -0,3 \quad Z_j = -1,1225$$

28)  $r_{YX_2} = 0,7942$   $r_{YX_3} = 0,8573$   $r_{X_2X_3} = 0,8969$   $r_{Y \cdot X_2X_3} = 0,8592$   $r_{YX_2 \cdot X_3} = 0,1111$   $r_{YX_3 \cdot X_2} = 0,5393$

29)  $\chi^2 = 20,3962$

$$30) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 123,34 & 197,88 \\ 123,34 & 1047,59 + 100 & 1686,73 \\ 197,88 & 1686,73 & 2742,7 + 100 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 40608 \\ 316919,85 \\ 499229,87 \end{bmatrix}$$

31)



32)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Y_t$	820	825	840	860	890	2358	2045	2248	2569	3045	2548	3159	3897	4518	4781
$X_{t2}$	9.12	9.38	10.27	11.28	9.17	8.24	7.91	7.54	7.63	7.24	7.11	6.82	7.58	6.47	5.58
$V_t$	0	0	0	0	0	8.24	7.91	7.54	7.63	7.24	7.11	6.82	7.58	6.47	5.58

33)  $\hat{Y}_t = 7922.6 - 442.32 \cdot X_{t2} + 254.66 \cdot V_t$

P1  $Y_t = 7922,6 - 442,32 X_{t2}$

P2  $Y_t = 7922,6 - 187,66 X_{t2}$

34)  $F^* = 58,1341$

37)  $Y_{16} = 4286,622$

38) Ponderi jednaki  $Y_{16} = 4384,828$

Aritmetički opadajući ponderi  $Y_{16} = 4416,646$

Prvo rastući, pa opadajući ponderi  $Y_{16} = 4366,648$

Polinomska šema prvog reda  $Y_{16} = 4328,693$

Geometrijski opadajući ponderi  $Y_{16} = 4418,302$

39) ARMA(1,2) i ARMA(3,1)

40) Za ARMA(1,2)  $Y_{811p} = 96,0813$   $Y_{812p} = 91,9338$   $Y_{813p} = 88,2427$

Za ARMA(3,1)  $Y_{811p} = 104,9518$   $Y_{812p} = 108,7537$   $Y_{813p} = 112,3908$

41) Za ARMA(1,2) MAE = 10,2141 MAPE = 9,97%