LINEARNO PROGRAMIRANJE

Linearno programiranje je matematički metod koji koristimo pri rešavanju problema vezanog ekstrema, s linearnom funkcijom cilja, s linearnim uslovnim nejednačinama, ili jednačinama i s dodatnim (posebnim) uslovom (zahtevom) da varijable imaju samo nenegativne vrednosti.

Linearno programiranje predstavlja takav metod matematičkog programiranja koji, za rešavanje definisanog problema, pretpostavlja postavljanje (formulisanje) matematičkog modela u kome je funkcija cilja linearna funkcija (relacija, forma) i ograničavajući uslovi takođe u obliku linearnih formi (jednačina i nejednačina).

U ekonomskom smislu, linearno programiranje je matematički metod za raspoređivanje (upotrebljavanje) ograničenih resursa na planirane procese (aktivnosti) na najbolji mogući način, s obzirom na unapred definisan (utvrđen) cilj.

Zadatak linearnog programiranja glasi: Naći (izračunati, odrediti) maksimalnu (minimalnu) vrednost linearne funkcije cilja, pri unapred datim ograničavajućim uslovima (linearne relacije).

Matematički: izračunati takvo $\underline{x}_{opt}\,(\underline{x}=(x_1,x_2,...x_n)^T)$ za koje će funkcija cilja $f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ dostići maksimum zadovoljavajući sistem ograničavajućih uslova:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i; \quad i=1,2,...,m$, uz opšti uslov $x_i \ge 0$, tj. $\underline{x} \ge 0$.

Proizvode se proizvodi $P_1,P_2,...,P_n$. Raspolaže se resursima $R_1,R_2,...,R_m$. $x_1,x_2,...,x_n$ su oznake za količine proizvoda $P_1,P_2,...,P_n$. a_{ij} su oznake za tehničke koeficijente, tj. potrošnju (upotrebu) resursa R_i po jedinici proizvoda P_j. $b_1,b_2,...,b_m$ su oznake za raspoložive količine resursa $R_1,R_2,...,R_m$.

$$
\begin{aligned}
&x_1,x_2,...,x_n \ge 0, \text{ tj. } x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,...,x_n \ge 0\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m
\end{aligned}
$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = z \to \max$$

$c_1,c_2,...,c_n$ su oznake za dobit (profit) po jedinici proizvoda. z je oznaka za ukupnu dobit ostvarenu proizvodnjom i prodajom proizvoda $P_1,P_2,...,P_n$ u obimu $x_1,x_2,...,x_n$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad \underset{(n,1)}{\underline{x}} \geq \underset{(n,1)}{\underline{0}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1} \qquad \underset{(m,n)}{\underline{A}} \, \underset{(n,1)}{\underline{x}} \leq \underset{(m,1)}{\underline{b}}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}_{1\times n} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \mathrm{z} \to \max \qquad \underset{(1,n)}{\underline{c}^T} \cdot \underset{(n,1)}{\underline{x}} = z \to \max$$

Jednostavnije,

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{A}\underline{x} \leq \underline{b}$$
$$\underline{c}^T \underline{x} = z \to \max$$

$$\begin{aligned} & x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{aligned}$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = z \to \max$$

Odgovarajući dualni model glasi:

$$\begin{aligned} & d_1, d_2, ..., d_n \geq 0 \\ & a_{11}d_1 + a_{21}d_2 + ... + a_{m1}d_m \geq c_1 \\ & a_{12}d_1 + a_{22}d_2 + ... + a_{m2}d_m \geq c_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{1n}d_1 + a_{2n}d_2 + ... + a_{mn}d_m \geq c_n \end{aligned}$$

$$b_1d_1 + b_2d_2 + ... + b_md_m = z^* = v \to \min$$

$$\underset{(1,m)}{\underline{d}^T} \geq \underset{(1,m)}{\underline{0}^T}$$

$$\underset{(1,m)}{\underline{d}^T} \underset{(m,n)}{\underline{A}} \geq \underset{(1,n)}{\underline{c}^T}$$

$$\underset{(1,m)}{\underline{d}^T} \underset{(m,1)}{\underline{b}} = z^* = v \to \min$$

$d_1, d_2, ..., d_m$ su oznake za dualne promenljive.

$$\begin{aligned} &\underline{x} \geq \underline{0} \\ &\underline{A}\underline{x} \leq \underline{b} \\ &\underline{c}^T \underline{x} = z \to \max \end{aligned}$$

Opšti problem maksimuma

$$\begin{aligned} &\underline{x} \geq \underline{0} \\ &\underline{A}\underline{x} \leq \underline{b}, \qquad \underline{b} \geq \underline{0} \\ &\underline{c}^T \underline{x} = z \to \max \end{aligned}$$

Standardni problem i model maksimuma

$$\begin{aligned} &\underline{x} \geq \underline{0} \\ &\underline{A}\underline{x} \geq \underline{b} \\ &\underline{c}^T \underline{x} = v \to \min \end{aligned}$$

Opšti problem minimuma

Primer:

Primarni problem

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ x_1 + 0,5x_2 + x_3 &\leq 14000 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 16000 \\ -x_2 + x_3 &\leq 7000 \\ x_2 &\leq 7000 \\ 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 &= z \to \max \qquad \text{(npr. dobit)} \end{aligned}$$

Kanonski oblik Primarnog problema

$$\begin{aligned} &x_1, x_2, x_3, d_1^*, d_2^*, d_3^*, d_4^* \geq 0 \\ &x_1 + 0,5x_2 + x_3 + d_1^* = 14000 \\ &2x_1 + 3x_2 + x_3 + d_2^* = 16000 \\ &-x_2 + x_3 + d_3^* = 7000 \\ &x_2 + d_4^* = 7000 \end{aligned}$$

$$10x_1 + 20x_2 + 15x_3 = z \to \max$$

Dual Primarnog problema

$$d_1, d_2, d_3, d_4 \geq 0$$
$$d_1 + 2d_2 \geq 10$$
$$0,5d_1 + 3d_2 - d_3 + d_4 \geq 20$$
$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 15$$
$$14000d_1 + 16000d_2 + 7000d_3 + 7000d_4 = v \rightarrow \min$$

Kanonski oblik duala

$d_1, d_2, d_3, d_4, x_1^*, x_2^*, x_3^* \geq 0$

$d_1 + 2d_2 \quad - x_1^* \quad = 10$

$0,5d_1 + 3d_2 - d_3 + d_4 \quad - x_2^* \quad = 20$

$d_1 + d_2 + d_3 \quad - x_3^* \quad = 15$

$14000\ d_1 + 16000\ d_2 + 7000\ d_3 + 7000\ d_4 = v \rightarrow \min$

Optimalno rešenje za primarni problem:

$x_1 = 0\, kom$ $\quad d_1^* = 3625$ časova (neiskor. kap R_1)

$x_2 = 2250\, kom$ $\quad d_2^* = d_3^* = 0$ (R_1 i R_2 su iskor. u potpunosti i predst. usko grlo),

$x_3 = 9250\, kom$ $\quad d_4^* = 4750$ (neisk. kap. R_4)

Zmax = 183750 din (10 din/kom · 0 kom + 20 din/kom · 2250 kom + 15 din/kom · 9250 kom = 0 din + 45000 din + 138750 din)

Optimalno rešenje za dual:

$d_1 = 0$ din/č. $\quad x_1^* = \frac{15}{2} = 7,5$

$d_2 = \frac{35}{4} = 8,75$ din/č. $\quad x_2 = x_3 = 0$

$d_3 = \frac{25}{4} = 6,25$ din/č

$d_4 = 0$ din/č.

Zmin = 183750 din (14000 č · 0 din/č · 16000 č · 8,75 din/č + 7000 č · 6,25 din/č = 0 din + 140000 din + 43750 din + 0 din)

Povećanje kapaciteta Resursa R_2 za 1 jed. rezultira u povećanju dobiti (profita, prihoda, ...) za 8,75 din, dok povećanje kapaciteta R_3 za 1 jed. rezultira u povećanju dobiti za 6,25 din. Ovo zbog toga što su resursi R_2 i R_3 iskorišćeni u potpunosti pa predstavljaju usko grlo.
Povećanje (proširenje) kapaciteta Resursa R_1 i R_4 ne bi dovelo do povećanja dobiti, jer prema optimalnom rešenju ovi resursi još nisu u potpunosti iskorišćeni.

U jednoj fabrici planira se uvođenje proizvodnje dijetalne hrane od sirovina S_j (j=1,2,3). Gotova hrana treba da sadrži najmanje 120 jedinica prvog (B_1), najmanje 600 jedinica drugog (B_2) i najmanje 200 jedinica trećeg (B_3) biološkog sastojka. Sadržaj bioloških sastojaka (u jedinicama po kilogramu) u pojedinim sirovinama pokazuje sledeća tabela:

Biološki sastojci	S_1	S_2	S_3

B_1	2	0	1
B_2	2	3	0
B_3	1	1	1

Odredite najjeftiniju dijetalnu hranu, ako cene sirovina iznose redom 300, 360 i 100 din/kg.

Rešenje:
Konstrukcija modela:
x_1, x_2 x_3 su oznake za količine sirovina s_1, s_2 i s_3 u kilogramima.

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$2x_1 \quad + x_3 \geq 120$$
$$2x_1 + 3x_2 \quad \geq 600$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 200$$
$$300\, \boldsymbol{x}_1 + 360\, \boldsymbol{x}_2 + 100\, \boldsymbol{x}_3 \rightarrow \min$$

Rešenje je optimalno:

$x_1 = 60$ $d_1 = 30$
$x_2 = 160$ $d_2 = 120$
$x_3 = 0$ $d_3 = 0$

Zmax = - 75600 $\Rightarrow$ Vmin = 75600

Rešavanje duala datog problema:

$$d_1, d_2, d_3 \geq 0$$
$$2d_1 + 2d_2 + d_3 \leq 300$$
$$3d_2 + d_3 \leq 360$$
$$d_1 \qquad d_3 \leq 100$$
$$120\, \boldsymbol{d}_1 + 600\, \boldsymbol{d}_2 + 200\, \boldsymbol{d}_3 = z \rightarrow \max$$

Prisustvo veštačke promenljive

Jedna fabrika proizvodi 4 artikla (A, B, C i D) pod sledećim uslovima potrošnej sirovine S (kg/kom.), utroška mašinskih časova na mašinama M_1 i M_2 (čas/kom.) i prodajnih cena (novčana jedinica/kom.):

Izvori	Proizvodi				Kapaciteti
	A	B	C	D	
S	2	1	1	3	600 kg
M1	0	2	1	4	1600 časova
M2	2	3	2	1	1000 časova
Prodajne cene	50	30	40	48	

Utvrdite optimalni plan proizvodnje uz maksimalni prihod, uzimajući u obzir da svu raspoloživu sirovinu treba preraditi i da se od proizvoda A može plasirati najviše 80 komada!

Rešenje:
x_1, x_2, x_3 i x_4 su oznake za broj komada proizvoda A, B, C i D.

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 600$$
$$2x_2 + x_3 + 4x_4 \quad \leq 1600$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 1000$$
$$x_1 \qquad\qquad\qquad \leq 80$$
$50\ \boldsymbol{x}_1 + 30\ \boldsymbol{x}_2 + 40\ \boldsymbol{x}_3 + 48\boldsymbol{x}_4 = z \rightarrow \max$

Optimalno rešenje:
Primarni problem:

$x_1 = x_2 = 0$ $\quad$ $v_1 = 0,\ d_2 = 960$
$x_3 = 480$ $\quad$ $d_3 = 0$
$x_4 = 40$ $\quad$ $d_4 = 80$

Zmax = 21120

Dual:
$d_2 = 0$ $\quad$ $x_1 = 1{,}2$

$d_3 = 14{,}4$ $\quad$ $x_2 = 24{,}4$

$d_4 = 0$ $\quad$ $x_3 = x_4 = 0$ $\quad$ $v_{min} = 21120$

Analiza osetljivosti

Ukoliko se u modelu linearnog programiranja, nakon određivanja optimalnog rešenja, promeni neki od uslova, elemenata ekonomsko-matematičkih modela, postavlja se pitanje da li nastale promene dovode do promene strukture vektorske baze na osnovu koje je određeno optimalno rešenje. Korišćenjem postupka postoptimalne analize moguće je ispitati optimalnost prethodno određenog rešenja pod promenjenim uslovima. Ispitivanje budućih stanja pomoću metoda postoptimalne analize podrazumeva da se postupak izračunavanja novog optimalnog rešenja vrši na osnovu već postojeće optimalne simpleks tabele. Predviđanjem budućih stanja i projekcijom rezultata omogućuje se smanjivanje rizika.
Naša ispitivanja će se odnositi na:

- promene u vektoru $\underline{c}^T$
- promene u vektoru $\underline{b}$
- analizu osetljivosti optimuma na promene u vektoru $\underline{c}^T$ i vektoru $\underline{b}$.

Ako se za elemente modela:

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{A}\underline{x} \leq \underline{b}$$
$$\underline{c}^T\,\underline{x} = z \rightarrow \max$$

Može utvrditi da su u funkciji nekih parametara reč je o parametarskom programiranju. Za parametarske funkcije važi:

- samo jedan parametar *t* postoji
- parametar je skalar
- od parametra zavise samo slobodni članovi i koeficijenti funkcije kriterijuma.

Na ovaj način se može utvrditi u kom intervalu se mogu kretati promene u vektoru $\underline{c}^T$ i $\underline{b}$.

Primer:

Jedna fabrika proizvodi četiri proizvoda (A, B, C i D) na dve mašine (M_1 i M_2). Kapaciteti mašina se mogu koristiti 16 sati dnevno, tokom pet dana u nedelji. Tehnički koeficijenti (čas/kom) i prodajne cene proizvoda (din/kom.) sadržani su u sledećoj tabeli:

Mašine	Tehnički koeficijenti			
	A	B	C	D
M_1	1	2	1	5
M_2	2	2	0	2
Prodajna cena	150	120	140	40

Proizvoda C može se plasirati najviše toliko koliko proizvoda B. U proizvodnji se koristi sirovina S u količinama od 1 kg, 2 kg, 2 kg odnosno 4 kg po komadu proizvoda respektivno. Raspoložive nedeljne količine sirovine su 120 kg.

1. Odrediti nedeljni plan proizvodnje uz maximalan prihod

Rešenje:
x_1, x_2, x_3 i x_4 su oznake za broj komada proizvoda A, B, C i D.

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 80$$
$$2x_1 + 2x_2 \quad + 2x_4 \leq 80$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 120$$
$$-x_2 + x_3 \leq 0$$
$$150x_1 + 120x_2 + 140x_3 + 40x_4 = z \rightarrow \max$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
d_1	1	2	1	**5**	80
d_2	**2**	2	0	2	80
d_3	1	2	2	4	120
d_4	0	-1	1	0	0
	150	120	140	40	0

...

Poslednja tabela:

	d_2	d_1	d_4	x_4	
x_2	-1/4	1/2	-1/2	2	20
x_1	3/4	-1/2	1/2	-1	20
d_3	1/4	-3/2	-1/2	-3	20
x_3	-1/4	1/2	1/2	2	20
	-47,5	-55	-85	-330	-8200

Opt. reš.
Prim. problem:
$x_1 = x_2 = x_3 = 20$
$x_4 = 0$
$z_{max} = 8200$

Dual:

$d_1 = 55$; $d_2 = 47{,}5$; $d_3 = 0$; $d_4 = 85$; $v_{\min} = 8200$

2. Izvršiti kontrolu tačnosti optimalne tabele

Rešenje:

$\underline{b}^T(\underline{r}^T) = [80 \quad 80 \quad 0 \quad 0]$ (Kapaciteti, odnosno vrednosti promen. u polaznoj tabeli)

$\underline{c}(\underline{s}) = \begin{bmatrix} 120 \\ 150 \\ 0 \\ 140 \end{bmatrix}$

	d_2	d_1	d_4	x_4	
x_2	-1/4	1/2	-1/2	2	20
x_1	3/4	-1/2	1/2	-1	20
d_3	1/4	-3/2	-1/2	-3	20
x_3	-1/4	1/2	1/2	2	20
	47,5	-55	-85	-330	

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{b}(\underline{s})$

Koeficijenti f-je cilja $\rightarrow [0 \quad 0 \quad 0 \quad 40] = \underline{c}^T(\underline{r}^T)$

$$\underline{c}^{'T} = \underline{c}(\underline{r}^T) - \underline{c}^T(\underline{s}\cdot \underline{B}_4) = [0,0,0,40] - [120,150,0,140]\cdot \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 3/4 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -3/2 & -1/2 & -3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= [0,0,0,40] - [47{,}5, 55, 85, 370] = [-47{,}5, -55, -85, -330]$$

$$\underline{b}^{'} = \underline{B}_4 \cdot \underline{b}(\underline{r}) + \underline{b}^T(\underline{s}) =$$

$$= \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 3/4 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -3/2 & -1/2 & -3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 80 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Rezime:

$\underline{c}^{'T}$ = Vektor vrsta koef. f-je cilja za prom. koje nisu u bazi opt. reš. minus Vektor vrsta koef. f-je cilja za prom. koje su u bazi opt. reš. puta Matrica B iz opt. tab.

$\underline{b}'$ = Vektor kapaciteta za prom. koje su u bazi opt. tab. plus Vektor kapaciteta za prom. koje nisu u bazi opt. tab. puta Matrica B iz opt. tab.

3. Promena f- je cilja (kriterijuma)

Da li je program određen u 1. optimalan ako cilj treba da bude maksimalno korišćenje kapaciteta mašina?

Rešenje:
Nova f-ja kriterijuma je: $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = z \rightarrow max$

		d_2	d_1	d_4	x_4	
4	x_2	-1/4	1/2	-1/2	2	20
3	x_1	3/4	-1/2	1/2	-1	20
0	d_3	1/4	-3/2	-1/2	-3	20
1	x_3	-1/4	1/2	1/2	2	20
		-1	-1	0	0	-160

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 40]$$

$$\underline{c}^T = [0,0,0,7] - [4,3,0,1] \cdot \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 3/4 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -3/2 & -1/2 & -3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} = [-1,-1,0,0]$$

Pošto u ovom vektoru nema pozitivnog el. zaključujemo da promena f-je kriterijuma nije rezultirala u promeni optimalnog rešenja tj. vektora $[20,20,20,20]^T$.
Vrednost nove f-je cilja je:

$$z_k = -\underline{c}_k^T \cdot \underline{b}' = -[4,3,0,1] \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} = -160$$

Znači da je maksimalno korišćenje kapaciteta mašina ravno raspoloživom kapacitetu, od 80č + 80 č = 160 časova.

Ukupan prihod ostaje 8200 dinara, jer nije došlo do promene opt. programa proizvodnje.

Da se u vektoru $\underline{c}_k^T$ našao i pozitivan elemenat, onda bi se u njegovoj koloni odabrao ishodni elemenat radi sprovođenja bazne transformacije i dolaženja do novog opt. rešenja.

4. Promena u vektoru kapaciteta.

Kako se menja optimalno rešenje 1. ako se kapacitet prve mašine poveća na 90 čas?

Rešenje:

Novi (korigovani) vektor kapaciteta je:

$$\underline{b}_k = \begin{bmatrix} 90 \\ 80 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[80, \quad 90, \quad 0, \quad 0]$$

	d_2	d_1	d_4	x_4	
x_2	-1/4	1/2	-1/2	2	25
x_1	3/4	-1/2	1/2	-1	15
d_3	1/4	-3/2	-1/2	-3	5
x_3	-1/4	1/2	1/2	2	25
	47,5	-55	-85	-330	-8750

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}'_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 3/4 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -3/2 & -1/2 & -3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \\ 5 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$\underline{b}'_k$ ne sadrži negativan elemenat, pa zaključujemo da se struktura optimalnog rešenja (programa) neće promeniti. Došlo je do promene vrednosti promenljivih u opt. programu, što rezultira u promeni vrednosti f-je cilja:

$$z_k = -[-47{,}5\,,\ -55,\ -85,\ -330] \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 8750$$

ili

$$z_k = -[150\,, 120,\ 140,\ 40] \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} = 8750$$

5. Određivanje intervala stabiliteta za vektore koeficijenata f-je cilja i vektore kapaciteta, tj. za vektore $\underline{c}^T$ i $\underline{b}$.

Rešenje:

a) **Interval stabiliteta za vektor $\underline{c}^T$:**

Parametarski oblik funkcije kriterijuma:

$$z_t = (150+t)x_1 + (120+t)x_2 + (140+t)x_3 + (40+t)x_4 \to \max$$

t je oznaka za parametar koji predstavlja moguća kolebanja prodajnih cena.

		d_2	d_1	d_4	x_4	
$120+t$	x_2	-1/4	1/2	-1/2	2	20
$150+t$	x_1	3/4	-1/2	1/2	-1	20
0	d_3	1/4	-3/2	-1/2	-3	20
$140+t$	x_3	-1/4	1/2	1/2	2	20
		-47,5-1/4t	-55-1/2t	-85-1/2t	-330-2t	-8200-60t

$$[0, \quad 0, \quad 0, \quad 40+t]$$

$$\underline{c}_t^{'T} = [0,0,0,40+t] - [120+t, 150+t, 0, 140+t] \cdot \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 3/4 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -3/2 & -1/2 & -3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[-47{,}5 - \frac{1}{4}t, -55 - \frac{1}{2}t, -85 - \frac{1}{2}t, -330 - 2t\right]$$

$$z_t \max = 20(150+t) + 20(120+t) + 20(140+t) + 0 \cdot (40+t)$$

$$z_t \max = 8200 + 60t$$

Na osnovu kriterijuma optimalnosti, mora biti:

$$-47{,}5 - \frac{1}{4}t \le 0 \Rightarrow t \ge -190$$

$$-55 - \frac{1}{2}t \le 0 \Rightarrow t \ge -110$$

$$-85 - \frac{1}{2}t \le 0 \Rightarrow t \ge -170$$

$$-330 - 2t \le 0 \Rightarrow t \ge -165$$

Rešenje sistema nejednačina $\{t \ge -190, t \ge -110, t \ge -170, t \ge -165\}$ je

$t \ge -110$, tj $t \in [-110, +\infty]$

Ovo znači da cene mogu da se smanjuju za najviše 110 dinara a da se opt.program ne promeni, kao i da rast cena ne može rezultirati u promeni optimalnog programa.

Zavisno od veličine promene cena za istu veličinu t, nova vrednost f-je cilja je:

$z_t = 8200 + 60t$.

b)Interval stabiliteta za vektor $\underline{b}$:

Parametarski oblik vektora $\underline{b}$:

$$\underline{b}_t = \begin{bmatrix} 80+t \\ 80+t \\ 120+t \\ 0 \end{bmatrix}$$

t je oznaka za parametar koji predstavlja moguća kolebanja u vektoru kapaciteta, tj. vektoru $\underline{b}$.

$$[80+t \quad 80+t \quad 0, \quad 0]$$

	d_2	d_1	d_4	x_4	
x_2	-1/4	1/2	-1/2	2	$20+\frac{1}{4}t$
x_1	3/4	-1/2	1/2	-1	$20+\frac{1}{4}t$
d_3	1/4	-3/2	-1/2	-3	$20-\frac{1}{4}t$
x_3	-1/4	1/2	1/2	2	$20+\frac{1}{4}t$
	-47,5	-55	-85	-330	-8200-102,5t

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 120+t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_t^{'T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 120+t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 3/4 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -3/2 & -1/2 & -3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80+t \\ 80+t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20+\frac{1}{4}t \\ 20+\frac{1}{4}t \\ 20-\frac{1}{4}t \\ 20+\frac{1}{4}t \end{bmatrix}$$

$$z_t = 150(20+\frac{1}{4}t) + 120(20+\frac{1}{4}t) + 140(20+\frac{1}{4}t) + 40.0 = 8200 + 102{,}5t$$

Na osnovu kriterijuma optimalnosti, mora biti:

$$20+\frac{1}{4}t \geq 0 \Rightarrow t \geq -80$$

$$20+\frac{1}{4}t \geq 0 \Rightarrow t \leq 80$$

Rešenje sistema nejednačina $\{t \geq -80, t \leq 80\}$

je

$t \in [-80{,}80]$, tj $-80 \leq x \leq 80$

Ovo znači da kapaciteti mogu da se smanjuju za najviše 80 jed. ili povećavaju za najviše 80 jed. a da se struktura opt. programa ne promeni. Međutim, sa promenom kapaciteta menja se vrednost promenljivih u opt. programu zavisno od veličine t. Kao posledica ove promene menja se i vrednost f-je cilja.

PRETPOSTAVKE PRIMENE LP MODELA

PRIMENA MODELA *LINEARNOG PROGRAMIRANJA* PRETPOSTAVLJA ZADOVOLJENJE ODREĐENIH PREDUSLOVA: PROPORCIONALNOSTI, ADITIVNOSTI, DELJIVOSTI I IZVESNOSTI. PROPORCIONALNOST I ADITIVNOST SE ODNOSE NA PRETPOSTAVKE O LINEARNOSTI MODELA, TE AKO SE OD NJIH ODSTUPA, PROBLEM SE SVODI NA *NELINEARNO PROGRAMIRANJE*; OVIM DVEMA ZAHTEVIMA NIJE U POTPUNOSTI UDOVOLJENO U SVIM PROIZVODNIM PROCESIMA, MEĐUTIM, NAJVEĆI DEO AKTIVNOSTI SE, U DOZVOLJENIM GRANICAMA TOLERANCIJE, IPAK MOŽE APROKSIMIRATI LINEARNIM VEZAMA.

PROPORCIONALNOST

PROPORCIONALNOST **(MULTIPLIKATIVNOST) ZNAČI DA SU VREDNOST FUNKCIJE KRITERIJUMA I ISKORIŠĆENI DEO KAPACITETA DIREKTNO SRAZMERNI VREDNOSTIMA PROMENLJIVIH U CELOKUPNOM SKUPU MOGUĆIH REŠENJA. U OVOM SLUČAJU, ZA DATU VREDNOST k-TE PROMENLJIVE x_k, PRI ČEMU ZA SVE OSTALE PROMENLJIVE VAŽI $x_j=0$ ZA $j \neq k$, VREDNOST FUNKCIJE KRITERIJUMA ĆE BITI $c_k x_k$ UZ DATI KOEFICIJENT c_k, A ISKORIŠĆENI DEO i-TOG KAPACITETA JE JEDNAK SA $a_{ik} x_k$ UZ DATI TEHNIČKI KOEFICIJENT a_{ik}.**

PRIMER **OBRADA JEDNOG PROIZVODA NA JEDNOJ MAŠINI TRAJE 20 MINUTA. AKO JE OBRAĐENO 7 KOMADA, UKUPNO UTROŠENO VREME ZA OBRADU IZNOSI 7·20=140 MINUTA.**

ADITIVNOST

ADITIVNOST **ZNAČI DA SE, NA BILO KOM NIVOU AKTIVNOSTI [x_j], VREDNOST FUNKCIJE KRITERIJUMA, KAO I ISKORIŠĆENI DEO KAPACITETA, MOGU IZRAZITI ZBIROM ODGOVARAJUĆIH VREDNOSTI KOJE SE ODNOSE NA POJEDINE PROMENLJIVE. ADITIVNOST PRETPOSTAVLJA DA SE U MODELU NE POJAVLJUJU MEĐUSOBNE FUNKCIJE PROMENLJIVIH, DAKLE NE POSTOJE MEŠOVITI ČLANOVI NITI U FUNKCIJI KRITERIJUMA, NITI MEĐU OGRANIČAVAJUĆIM USLOVIMA. USLOV ADITIVNOSTI SE ODNOSI ZAJEDNO NA SVE PROMENLJIVE U JEDNOJ RELACIJI.**

PRIMER **OBRADA JEDNOG PROIZVODA NA JEDNOJ MAŠINI TRAJE 20 MINUTA PO KOMADU, A DRUGOG, NA ISTOJ MAŠINI, 30 MINUTA PO KOMADU. AKO PRVOG PROIZVODA TREBA OBRADITI 7 KOMADA, A DRUGOG 4 KOMADA, UKUPNO VREME OBRADE ĆE BITI 7·20 +4·30=260 MINUTA.**

DELJIVOST

OSOBINA *DELJIVOSTI* PRETPOSTAVLJA DA JEDINICE PROMENLJIVIH MOGU BITI DELJENE U BILO KOJOJ RAZMERI, DAKLE, KONTINUIRANE SU. U NEKIM ZADACIMA ODLUČIVANJA NEOPHODNO JE OBEZBEDITI CELOBROJNE VREDNOSTI PROMENLJIVAMA. U ZAVISNOSTI OD SKUPA OGRANIČAVAJUĆIH USLOVA, MOGUĆE JE DA SE DIREKTNO DOBIJU CELOBROJNA REŠENJA, ZATIM, AKO REŠENJA NISU CELOBROJNA, MOGUĆE IH JE ZAOKRUGLITI, MEĐUTIM, TAKAV POSTUPAK NAJČEŠĆE NIJE ISPRAVAN SA STANOVIŠTA POSTAVLJENE FUNKCIJE KRITERIJUMA. AKO REŠENJA NISU CELOBROJNA, A NEOPHODNO JE OBEZBEDITI NAJPOVOLJNIJE CELOBROJNO REŠENJE, TADA SE RADI O SPECIJALNOM PROBLEMU *CELOBROJNOG PROGRAMIRANJA*.

PRIMER **OBRADA JEDNOG PROIZVODA NA JEDNOJ MAŠINI TRAJE 25 MINUTA PO KOMADU, RASPOLOŽIVI KAPACITET MAŠINE IZNOSI 240**

MINUTA. AKO NISU POSTAVLJENI DRUGI USLOVI, DATOG PROIZVODA SE MOŽE OBRADITI NAJVIŠE 240/25=9,6 KOMADA.

IZVESNOST

IZVESNOST **ZNAČI DA SU SVI PARAMETRI MODELA (A_{IJ}, B_I, C_J) POZNATE, UNAPRED DATE KONSTANTE. KOD REALNIH EKONOMSKIH PROBLEMA TEŠKO JE UDOVOLJITI OVOM ZAHTEVU, NAIME, ZADATAK PROGRAMIRANJA SE MOŽE ODNOSITI NA FORMULISANJE BUDUĆIH OPTIMALNIH ODLUKA, DAKLE PARAMETRIMA MODELA SU DODELJENE PROGNOZIRANE VREDNOSTI, ŠTO NUŽNO DOVODI DO ODREĐENOG STEPENA NEIZVESNOSTI. NEIZVESNOST U ODLUČIVANJU MOŽE BITI SMANJENA PUTEM** ***ANALIZE OSETLJIVOSTI*** **OPTIMALNOG REŠENJA. AKO JE STEPEN NEIZVESNOSTI IZUZETNO VISOK, TADA SE PARAMETRI MOGU TRETIRATI KAO** ***ALEATORNE PROMENLJIVE.***