

## FORMULISANJE I PRIMENA MODELA LP

Formulisati model znači na osnovu poznatih podataka, tj. vrednosti parametara modela (A, b, c) specificovati

- \* promenljive,
- \* ograničavajuće uslove i
- \* funkciju kriterijuma.

## UTVRĐIVANJE PROIZVODNOG PROGRAMA U INDUSTRIJSKIM PREDUZEĆIMA

**PRIMER 2.** U jednoj fabrici treba odrediti takav program proizvodnje, koji obezbeđuje maksimalni prihod, pod sledećim tehnološkim uslovima:

Postrojenja	P r o i z v o d i			Kapacitet (maš. čas.)
	A	B	C	
	Utrošak mašinskih časova po jednom komadu proizvoda			
E <sub>1</sub>	6	1	3	2100
E <sub>2</sub>	4	3	1	3150
E <sub>3</sub>	3	2	2	4200
Prodajna cena	20	10	30	

Potrebno je uzeti u obzir i to da proizvodnja proizvoda B može biti najviše 4 puta veća od proizvodnje proizvoda A!

**R 2.** Neka su  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$  broj komada proizvoda A, B i C respektivno. Model glasi:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (1)$$

$$6x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 2100 \quad (2)$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3150 \quad (3)$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4200 \quad (4)$$

$$-4x_1 + x_2 \leq 0 \quad (5)$$

$$20x_1 + 10x_2 + 30x_3 = z \rightarrow \max \quad (6)$$

**PRIMER 3.** Treba odrediti optimalni godišnji proizvodni program za jedno industrijsko preduzeće. Kriterijum optimalnosti je maksimalni prihod. Podaci za formulisanje modela dati su sledećom tabelom:

Izvori energije	Potreban broj minuta za izradu jednog komada proizvoda					Kapacitet (m.č.)
	A	B	C	D	E	
M <sub>1</sub>	0	1	1	1	1	1600
M <sub>2</sub>	1	0	1	0	1	1000
M <sub>3</sub>	1	2	1	1	0	2000
Prodajna cena (din/kom.)	400	200	600	400	100	

**R 3.** Neka su  $x_j$ ,  $j=1, \dots, 5$  broj komada proizvoda A, B, C, D i E, redom.

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4, 5$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 96000$$

$$x_1 + x_3 + x_5 \leq 60000$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 120000$$

$$400x_1 + 200x_2 + 600x_3 + 400x_4 + 100x_5 = z \rightarrow \max$$

**PRIMER 4.** Jedna fabrika proizvodi tri proizvoda (A, B i C), pod sledećim uslovima:

Izvori energije	Tehnički koeficijenti (čas./kom.)			Kapacitet (čas)
	A	B	C	
M <sub>1</sub>	2	1	3	18
M <sub>2</sub>	1	1	2	6
M <sub>3</sub>	1	2	1	12

Odredite optimalni program proizvodnje ako je cilj maksimalno korišćenje kapaciteta svih izvora energije!

**R 4.** Neka su  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$  broj komada proizvoda A, B i C, redom. Model je sledeći:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 18 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \quad (3)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \quad (4)$$

$$4x_1 + 4x_2 + 6x_3 = z \rightarrow \max \quad (5)$$

**PRIMER 5.** Jedna fabrika proizvodi tri proizvoda (A, B i C) pod sledećim tehnološkim uslovima:

a) Sva tri proizvoda treba obraditi na mašinama  $M_1$  i  $M_2$ . Odgovarajuće tehničke koeficijente (čas/kom.) i kapacitete (u časovima) pokazuje sledeća tabela:

Mašine	A	B	C	Kapaciteti
$M_1$	1	0,5	1	1400
$M_2$	2	3	1	1600

b) Obim proizvodnje proizvoda C može biti najviše za 800 komada veći od obima proizvoda B.

c) Kupci  $K_i$  ( $i=1,2,3,4,5$ ) su dostavili porudžbine redom za 100, 200, 180, 120 i 100 komada proizvoda B. Od navedene količine više se ne može plasirati ali se porudžbinama ne mora obavezno udovoljiti.

Odredite optimalni asortiman uz maksimalni obim proizvodnje!

**R 5.** Neka su  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$  broj komada proizvoda A, B i C, redom. Model:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (1)$$

$$x_1 + 0,5x_2 + x_3 \leq 1400 \quad (2)$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 1600 \quad (3)$$

$$-x_2 + x_3 \leq 800 \quad (4)$$

$$x_2 \leq 700 \quad (5)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = z \rightarrow \max \quad (6)$$

**PRIMER 6.** Prema podacima službe za istraživanje tržišta industrije nameštaja, kupci su u sledećoj sezoni zainteresovani za garniture spavaćih soba  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$ . Pomenuti tipovi nameštaja se proizvode u pogonima  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$  ove fabrike, i to u dve izvedbe ( $V_1$  i  $V_2$ ). Različite izvedbe zahtevaju različita vremena proizvodnje (čas/garnitura) i obezbeđuju različit prihod (din/garnitura), kao što je to prikazano sledećom tabelom:

Pogoni	$S_1$		$S_2$		$S_3$		Kapacitet (čas/sezona)
	$V_1$	$V_2$	$V_1$	$V_2$	$V_1$	$V_2$	
$P_1$	2	4	2	-	2	1	4000
$P_2$	4	-	6	4	2	15	14200
$P_3$	4	6	8	20	14	8	12000
Prihod	100 0	150 0	110 0	400	110 0	600	

**R 6.** Neka su  $x_{ij}$  broj garnitura tipa  $i$  po izvedbi  $j$ ,  $i=1,2,3$ ,  $j=1,2$ . Model:

$$\begin{aligned}
 &x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,3, \quad j=1,2 \\
 &2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{21} + 2x_{31} + x_{32} \leq 4000 \\
 &4x_{11} + 6x_{21} + 4x_{22} + 2x_{31} + 15x_{32} \leq 14200 \\
 &4x_{11} + 6x_{12} + 8x_{21} + 20x_{22} + 14x_{31} + 8x_{32} \leq 12000 \\
 &1000x_{11} + 1500x_{12} + 1100x_{21} + 400x_{22} + 1100x_{31} + 600x_{32} = z \rightarrow \max
 \end{aligned}$$

**PRIMER 7.** Jedna fabrika proizvodi četiri vrste džema ( $D_1, D_2, D_3$  i  $D_4$ ), od tri voća ( $V_1, V_2$  i  $V_3$ ), koristeći dve tehnologije ( $T_1$  i  $T_2$ ). Uslovi proizvodnje su sledeći:

a) Za proizvodnju po 10 kg pojedinih džemova troši se sledeća količina voća, redom:

$D_1$ : po prvoj tehnologiji 2 kg, 2 kg i 8 kg  
 po drugoj tehnologiji 1 kg, 4 kg i 6 kg  
 $D_2$ : po prvoj tehnologiji 8 kg, 0 kg i 4 kg  
 po drugoj tehnologiji 6 kg, 0 kg i 6 kg  
 $D_3$ : po prvoj tehnologiji 3 kg, 2 kg i 8 kg  
 po drugoj tehnologiji 4 kg, 2 kg i 6 kg  
 $D_4$ : po prvoj tehnologiji 0 kg, 0 kg i 10 kg  
 po drugoj tehnologiji 0 kg, 0 kg i 12 kg

b) Raspoložive količine voća su, redom, 10000 kg, 16000 kg i 20000 kg.

c) Za prve tri vrste džema određeni su gornji limiti plasmana, redom, 1000 kg, 4000 kg i 1500 kg, dok za četvrtu vrstu nije ograničen plasman.

d) Prodajne cene pojedinih džemova u din/kg, redom su: 250, 180, 210 i 240.

Odredite koliko kg džema koje vrste i po kojoj tehnologiji treba proizvesti ako je cilj maksimalni prihod!

**R 7.** Neka su  $x_{ij}$  količine u kg proizvedenog džema vrste  $i$  po tehnologiji  $j$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ ,  $j=1, 2$ . Model:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, 3, 4, \quad j=1, 2 \quad (1)$$

$$0,2x_{11} + 0,8x_{21} + 0,3x_{31} + 0,1x_{12} + 0,6x_{22} + 0,4x_{32} \leq 10000 \quad (2)$$

$$0,2x_{11} + 0,2x_{31} + 0,4x_{12} + 0,2x_{32} \leq 16000 \quad (3)$$

$$0,8x_{11} + 0,4x_{21} + 0,8x_{31} + 1,0x_{41} + 0,6x_{12} + 0,6x_{22} + 0,6x_{32} + 1,2x_{42} \leq 20000 \quad (4)$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 1000 \quad (5)$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 4000 \quad (6)$$

$$x_{31} + x_{32} \leq 1500 \quad (7)$$

$$250x_{11} + 180x_{21} + 210x_{31} + 240x_{41} + 250x_{12} + 180x_{22} + 210x_{32} + 240x_{42} = z \rightarrow \max \quad (8)$$

**PRIMER 8.** U jednoj fabrici proizvode se proizvodi  $A_1, A_2, A_3$  i  $A_4$ , pod sledećim uslovima:

Izvori energije	Tehnički koeficijenti				Godišnji kapacitet
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	
Sirovina (kg/kom.)	3	2	1	3	Neograničeno
Mašina I (čas/kom.)	1	2	3	1	600000 časova
Mašina II (čas/kom.)	11	0	1	2	800000 časova
Troškovi (din/kom.)	400	400	320	600	

Posebni uslovi: mora se preraditi najmanje 400000 kg sirovine godišnje, i kapacitet mašine I treba iskoristiti u potpunosti. Odredite godišnji plan proizvodnje uz minimalne troškove!

**R 8.** Neka su  $x_j$  količine u komadima proizvoda  $A_j, j=1, 2, 3, 4$ . Model:

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4 \quad (1)$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 400000 \quad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 600000 \quad (3)$$

$$11x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 800000 \quad (4)$$

$$400x_1 + 400x_2 + 320x_3 + 600x_4 = v \rightarrow \min \quad (5)$$

**PRIMER 9.** U jednoj fabrici treba proširiti asortiman proizvodnje proizvodima A, B i C. Proizvodi prolaze kroz dve kritične faze iskorišćenja kapaciteta, i to pri obradi na mašinama I i II. U toku probne proizvodnje svaka mašina je radila po 120 časova za proizvodnju svakog proizvoda, i za to je vreme proizveden sledeći broj komada pojedinih proizvoda:

Mašine	Proizvodi		
	A	B	C
I	60	24	30
II	30	15	20

Kapaciteti rezervisani za proizvodnju ovih proizvoda iznose 3750 časova na mašini I i 6400 časova na mašini II. Za proizvod A se postavlja ograničenje plasmana na najviše 250 komada. Prodajne cene iznose, redom, 25000, 45000 i 40000 dinara po komadu. Odredite program koji obezbeđuje maksimalni prihod!

**R 9.** Ograničenja kapaciteta se definišu prema ovim koeficijentima. Neka je  $x_1, x_2$  i  $x_3$  broj komada proizvoda A, B i C, respektivno. Model:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 3750$$

$$4x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 6400$$

$$x_1 \leq 250$$

$$25000x_1 + 45000x_2 + 40000x_3 = z \rightarrow \max$$

**PRIMER 10.** U fabrici trikotaže proizvodi se tri vrste dečjih džempera, A, B i C. Za proizvodnju se koristi vuneno predivo, u količinama 4, 8 i 5 jedinica po komadu, respektivno. Nabavna služba fabrike je obezbedila 1800 jedinica prediva. Predivo se prvo predaje pogonu  $P_1$  (za pletenje), iz kojeg prelazi u pogon  $P_2$  (radi šivenja). U toku probne proizvodnje pogoni su radili po 30 časova na svakoj vrsti proizvoda i proizveden je sledeći broj komada džempera:

Pogon	Vrsta proizvoda		
	A	B	C
$P_1$	15	5	30
$P_2$	30	5	10

Kapaciteti pogona su, redom 620 i 900 časova. Na tržištu se može plasirati najviše 800 džempera. Prodajne cene su, redom, 7, 5 i 9 novčanih jedinica po komadu pojedinih vrsti džempera. Odredite optimalni program proizvodnje uz maksimalni prihod!

**R 10.** Neka su  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$  broj komada džempera A, B i C, respektivno. Model:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (1)$$

$$4x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 1800 \quad (2)$$

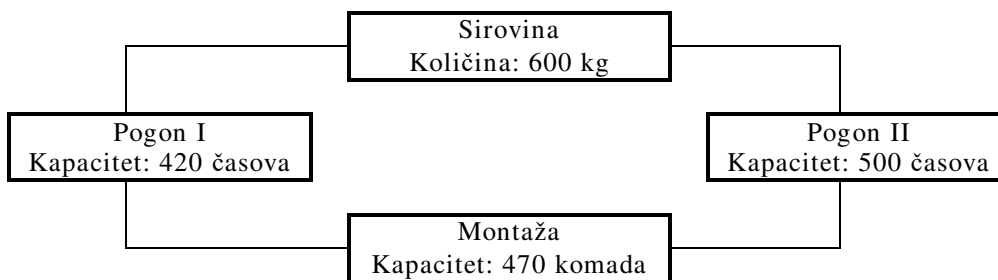
$$2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 620 \quad (3)$$

$$x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 900 \quad (4)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 800 \quad (5)$$

$$7x_1 + 5x_2 + 9x_3 = z \rightarrow \max \quad (6)$$

**PRIMER 11.** Proces proizvodnje i plasmana proizvoda A i B u jednoj fabrici su prikazani sledećom šemom:



Proizvodi se pripremaju alternativno ili samo u pogonu I ili samo u pogonu II. Za jedan komad proizvoda A treba angažovati 2 časa pogona I ili 3 časa pogona II, a za jedan komad proizvoda B 1 čas pogona I ili 2 časa pogona II. Za komad proizvoda A troši se 2 kg sirovine, a za komad B 1 kg. Ukupno se može montirati najviše 470 komada proizvoda. Prodajne cene proizvoda su, redom 100 din i 150 din po komadu. Odredite optimalni program proizvodnje!

**R 11.** Neka je  $x_{ij}$  broj komada proizvoda  $i$  (za proizvod A je  $i=1$ , za B je  $i=2$ ) proizvedenih u pogonu  $j$  ( $j=1$  za pogon I i  $j=2$  za pogon II). Model:

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \geq 0 \quad (1)$$

$$2x_{11} + 2x_{12} + x_{21} + x_{22} \leq 600 \quad (2)$$

$$2x_{11} + x_{21} \leq 420 \quad (3)$$

$$3x_{12} + 2x_{22} \leq 500 \quad (4)$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \leq 470 \quad (5)$$

$$100x_{11} + 100x_{12} + 150x_{21} + 150x_{22} = z \rightarrow \max \quad (6)$$



**PRIMER 12.** U jednom pogonu izrađuju se proizvodi A i B, na dve mašine ( $M_1$  i  $M_2$ ), na alternativan način, pod sledećim uslovima:

a) na mašini  $M_1$  može se proizvesti za 1 čas ili 100 komada A ili 120 komada B; kapacitet je 10 mašinskih časova;

b) uz isti kvalitet kao i na prvoj mašini, na mašini  $M_2$  može se za 1 čas proizvesti ili 40 komada A ili 60 komada B; kapacitet je 12 mašinskih časova;

c) zbog uslova plasmana, potrebno je od svakog proizvoda proizvesti najmanje po 500 komada.

Odredite koji proizvod na kojoj mašini treba proizvesti ako se za kriterijum uzimaju minimalni troškovi! Troškovi 1 mašinskog časa su: 200 dinara prve mašine i 100 dinara druge.

**R 12.** Promenljive su:

$x_{11}$  je broj komada proizvoda A proizveden na prvoj mašini,

$x_{12}$  je broj komada proizvoda A proizveden na drugoj mašini,

$x_{21}$  je broj komada proizvoda B proizveden na prvoj mašini i

$x_{22}$  je broj komada proizvoda B proizveden na drugoj mašini.

Model:

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \geq 0 \quad (1)$$

$$(1/100)x_{11} + (1/120)x_{21} \leq 10 \quad (2)$$

$$(1/40)x_{12} + (1/60)x_{22} \leq 12 \quad (3)$$

$$x_{11} + x_{12} \geq 500 \quad (4)$$

$$x_{21} + x_{22} \geq 500 \quad (5)$$

$$2x_{11} + (5/2)x_{12} + (5/3)x_{21} + (5/3)x_{22} = v \rightarrow \min \quad (6)$$

**PRIMER 13.** Pogon jedne fabrike koristi tri mašine  $M_j$  za proizvodnju dve vrste delova  $D_j$  za svoj finalni proizvod. Mašinama se vrši jedna te ista radna operacija, a to znači da svaki komad proizvoda treba obraditi samo na jednoj od mašina. Tehnički koeficijenti u mašinskim časovima po komadu proizvoda i kapaciteti u mašinskim časovima dati su sledećom tabelom:

Mašine	Delovi		Kapaciteti
	$D_1$	$D_2$	
$M_1$	2	1	100
$M_2$	3	2	200
$M_3$	4	5	250

Po jednom komadu proizvoda troši se, redom, 3 i 5 kg sirovine, od koje je na raspolaganju najviše 500 kg. Odredite optimalni program proizvodnje tako da utrošena količina date sirovine bude minimalna!

**R 13.** Neka je  $x_{ij}$  broj komada delova  $i$ ,  $i=1, 2$ , na mašini  $j$ ,  $j=1, 2, 3$ .

Model:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, \quad j=1, 2, 3 \quad (1)$$

$$2x_{11} + x_{21} \leq 100 \quad (2)$$

$$3x_{12} + 2x_{22} \leq 200 \quad (3)$$

$$4x_{13} + 5x_{23} \leq 250 \quad (4)$$

$$3x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 5x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23} \leq 500 \quad (5)$$

$$3x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 5x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23} = v \rightarrow \min \quad (6)$$

**PRIMER 14.** U jednom pogonu proizvode se tri proizvoda  $P_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) od dve vrste materijala  $M_j$  ( $j=1, 2$ ), prema sledećim tehnološkim uslovima:

Materijal	Utrošak materijala po jedinici proizvoda			Raspoložive količine materijala
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	
$M_1$	8 kg	16 kg	10 kg	500 kg
$M_2$	4 kg	18 kg	14 kg	600 kg

Svaki proizvod se može proizvoditi alternativno, ili od  $M_1$  ili od  $M_2$ . Svaki proizvod prolazi kroz finalnu montažu, čiji je kapacitet 300 časova i koja se angažuje po 2, 3 i 4 časa po jedinici proizvoda, redom, bez obzira na vrstu utrošenog materijala. Odrediti optimalni program proizvodnje ako je cilj maksimum utrošenog fonda časova finalne montaže.

**R 14.**

Neka je  $x_{ij}$  broj proizvedenih jedinica proizvoda  $P_i$  od materijala  $M_j$ ,  $i=1, 2, 3$ ,  $j=1, 2$ .

Model:

$$\begin{aligned}
 & x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, 3, \quad j=1, 2 \\
 & 8x_{11} + 16x_{21} + 10x_{31} \leq 500 \\
 & \qquad \qquad \qquad 4x_{12} + 18x_{22} + 14x_{32} \leq 600 \\
 & 2x_{11} + 3x_{21} + 4x_{31} + 2x_{12} + 3x_{22} + 4x_{32} \leq 300 \\
 & 2x_{11} + 3x_{21} + 4x_{31} + 2x_{12} + 3x_{22} + 4x_{32} = z \rightarrow \max
 \end{aligned}$$

**PRIMER 15.** Jedan pogon izrađuje dva proizvoda (A i B) na tri mašine ( $M_1$ ,  $M_2$  i  $M_3$ ), na alternativan način, pod sledećim uslovima:

- Kapacitet mašine  $M_1$  je 5000 časova. Obrada proizvoda A traje 2 časa po komadu, a proizvoda B 4 časa po komadu.
- Kapacitet mašine  $M_2$  iznosi 2000 časova i treba ga 100% iskoristiti. Obrada proizvoda A traje 2 časa po komadu, a proizvoda B 1 čas po komadu.
- Kapacitet mašine  $M_3$  je 2000 časova, takođe treba 100% iskoristiti. Obrada proizvoda A traje 5 časova po komadu, a obrada proizvoda B 1 čas po komadu.
- Treba proizvesti 1000 komada A i 2000 komada B.
- Dobit u dinarima po komadu proizvoda, u zavisnosti na kojoj mašini je proizvod obrađen, pokazuje sledeća tabela:

Proizvod	Mašine		
	$M_1$	$M_2$	$M_3$
A	300	400	500
B	600	200	100

**R 15.** Neka je  $x_{ij}$  broj komada proizvoda A i B ( $i=1, 2$ ) na mašinama  $M_j$  ( $j=1, 2, 3$ ).

Model:

$$\begin{aligned}
 & x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, \quad j=1, 2, 3 \\
 & 2x_{11} + 4x_{21} \leq 5000 \\
 & 2x_{12} + x_{22} = 2000 \\
 & 5x_{13} + x_{23} = 2000 \\
 & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1000 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2000 \\
 & 300x_{11} + 400x_{12} + 500x_{13} + 600x_{21} + 200x_{22} + 100x_{23} = z \rightarrow \max
 \end{aligned}$$

**PRIMER 16.** Ishranu jednog bolesnika treba rešiti pomoću prehrambenih proizvoda  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$ , ali tako da bolesnik dobije bar minimalne količine propisanih vitamina  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  i  $V_4$ . Sastav pojedinih proizvoda, minimalni zahtevi za vitaminima i cene su date sledećom tabelom. Odredite optimalni program uz minimalne troškove!

Vitamini	Sadržaj vitamina u prehrambenim proizvodima (jedinica/gram)			Minimum vitamina (jedinica)
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	
$V_1$	5	0	2	80
$V_2$	6	3	0	70
$V_3$	2	1	1	100
$V_4$	1	1	2	90
Cena (din/gram)	10	8	12	

**R 16.** Neka je  $x_j$  količina u gramima prehrambenog proizvoda  $P_j$  ( $j=1, 2, 3$ ).

Model:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$5x_1 + 2x_3 \geq 80$$

$$6x_1 + 3x_2 \geq 70$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 100$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 90$$

$$10x_1 + 8x_2 + 12x_3 = v \rightarrow \min$$

## UTVRĐIVANJE PROIZVODNOG PROGRAMA U POLJOPRIVREDNIM PREDUZEĆIMA

**PRIMER 17.** U mešaoni stočne hrane proizvodi se koncentrat za tov teladi. Koncentrat se dobija mešanjem tri hraniva  $H_j$  ( $j=1, 2, 3$ ), koja od najvažnijih bioloških sastojaka  $B_i$  ( $i=1, 2$ ) sadrže sledeći broj jedinica po 1 kg:

Biološki sastojci	Hraniva		
	$H_1$	$H_2$	$H_3$
$B_1$	2	2	1
$B_2$	5	4	0
$B_3$	4	3	0

Koncentrat mora da sadrži najmanje 100 jedinica  $B_1$ , najmanje 240 jedinica  $B_2$  i najmanje 200 jedinica  $B_3$ . Odredite najjeftiniji koncentrat ako je cena hraniva 25, 22 i 25 din/kg, respektivno!

**R 17.** Neka je  $x_j$  količina u kg hraniva  $H_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) koja se uzima u mešavinu.

Model:

$$\begin{aligned}x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 100 \\5x_1 + 4x_2 &\geq 240 \\4x_1 + 3x_2 &\geq 200 \\25x_1 + 22x_2 + 25x_3 = v &\rightarrow \min\end{aligned}$$

**PRIMER 18.** Napravite takvu mešavinu za ishranu stoke koja uz data ograničenja obezbeđuje minimalne troškove. Za mešavinu možemo koristiti ječam, kukuruz i lucerkino brašno. Cene ovih hraniva iznose 200, 225 i 400 n.j./kg, respektivno. Jedan kg hraniva sadrži sledeće količine (u gramima) najvažnijih bioloških sastojaka  $B_1$ ,  $B_2$  i  $B_3$ :

Hraniva	Biološki sastojci		
	$B_1$	$B_2$	$B_3$
Ječam	87	743	86
Kukuruz	24	131	18
Lucerkino brašno	98	420	136
Dnevne potrebe jednog grla (kg)	2,8-3,2	2,3-2,9	0,473

Od svih hraniva ukupno, jedno grlo treba da dobije tačno 10 kg dnevno. U mešavini kukuruz može da čini najviše 60% ukupne količine, dok od lucerkinog brašna mora biti najmanje 5% ukupne količine. Postavite model mešavine za dnevne potrebe 20 grla!

**R 18.** Neka su  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$  količine u kg ječma, kukuruza i lucerkinog brašna koje ulaze u mešavinu hraniva za 20 grla. Model:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (1)$$

$$87x_1 + 24x_2 + 98x_3 \geq 56000 \quad (2)$$

$$87x_1 + 24x_2 + 98x_3 \leq 64000 \quad (3)$$

$$743x_1 + 131x_2 + 420x_3 \geq 46000 \quad (4)$$

$$743x_1 + 131x_2 + 420x_3 \leq 58000 \quad (5)$$

$$86x_1 + 18x_2 + 136x_3 = 9460 \quad (6)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 200 \quad (7)$$

$$x_2 \leq 120 \quad (8)$$

$$x_3 \geq 10 \quad (9)$$

$$200x_1 + 225x_2 + 400x_3 = v \rightarrow \min \quad (10)$$

**PRIMER 19.** Na farmi jednog poljoprivrednog dobra pojedinim grlima stoke treba obezbediti, u zavisnosti od njihove starosti, različita hraniva. Sopstvena fabrika stočne hrane proizvodi četiri koncentrata ( $K_j$ ,  $j=1,2,3,4$ ) koji sadrže sledeće količine najvažnijih sastojaka (podaci u tabeli su dati kao broj uslovnih jedinica belančevine i skroba u 1 kg koncentrata):

Sastojci	Koncentrati			
	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$
Belančevina	2	4	6	2
Skrob	8	4	2	4

- a) U pojedinim periodima starosti svako grlo mora da dobije najmanje po 1200 jedinica belančevine i 1600 jedinica skroba.  
 b) Posebno treba uzeti u obzir da belančevina mora biti najmanje 20% u odnosu na skrob u ukupnoj količini koncentrata koja će biti data stoci.  
 c) Po 1 kg pojedinih koncentrata košta 10, 8, 6 i 9 dinara.  
 Koliko kg pojedinih koncentrata treba dati svakom grlu pa da troškovi prehrane budu najniži?

**R 19.** Neka je  $x_j$  količina u kg koncentrata  $K_j$  ( $j=1,2,3,4$ ), koja će biti data svakom grlu. Model:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad (1)$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \geq 1200 \quad (2)$$

$$8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 1600 \quad (3)$$

$$x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 3x_4 \geq 0 \quad (4)$$

$$10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 9x_4 = v \rightarrow \min \quad (5)$$



**PRIMER 20.** Jedno poljoprivredno preduzeće ima dve kategorije zemljišta ( $Z_1$  i  $Z_2$ ) koja treba zasejati sa tri kulture ( $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ). Sledeća tabela sadrži podatke o veličini pojedinih kategorija zemljišta u hektarima, i prinose pojedinih kultura u dt/ha (dt je oznaka za decitonu, 1 dt = 0,1 tona = 100 kg):

Zemljište	Kultura			Veličina (ha)
	$K_1$	$K_2$	$K_3$	
$Z_1$	20	20	50	1000
$Z_2$	40	10	10	2000

Zbog sklopljenih ugovora preduzeće mora obezbediti tačno 20000 dt kulture  $K_2$ , najmanje 20000 dt kulture  $K_3$ , a od kulture  $K_1$  može prodati najviše 50000 dt. Sva površina zemljišta mora biti zasejana. Koliko hektara, koje kategorije zemljišta treba zasejati pojedinim kulturama, ako je cilj maksimalni prihod, a prodajne cene pojedinih kultura su 1,5 hiljada dinara, 2 hiljade dinara i 1 hiljada dinara, po decitoni, respektivno?

**R 20.** Neka je  $x_{ij}$  broj ha zemljišta  $i$  pod kulturom  $j$  ( $i=1, 2$ ,  $j=1, 2, 3$ ). Model:

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \quad (1)$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1000 \quad (2)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2000 \quad (3)$$

$$20x_{12} + 10x_{22} = 20000 \quad (4)$$

$$50x_{13} + 10x_{23} \geq 20000 \quad (5)$$

$$20x_{11} + 40x_{21} \leq 50000 \quad (6)$$

$$30x_{11} + 40x_{12} + 50x_{13} + 60x_{21} + 20x_{22} + 10x_{23} = z \rightarrow \max \quad (7)$$

**Objašnjenje** Relacija (7) sadrži prihod od prodaje pojedinih kultura, kao proizvod veličine prinosa i prodajne cene. Za kulturu  $K_1$  na zemljištu  $Z_1$  je: prinos  $20x_{11}$ , prodajna cena po jedinici prinosa 1,5 hiljada dinara, pa je ukupan prihod  $1,5 \cdot 20x_{11} = 30x_{11}$  u hiljadama dinara; slično je i za ostale kulture.

## PRIPREMA PROIZVODNOG PROCESA – PROBLEM SEČENJA

**PRIMER 21.** Pogon jedne metaloprerađivačke fabrike treba da iskroji najmanje 240 komada šipki dužine 2,5 metara, tačno 500 komada šipki dužine 3 metra i najmanje 200 komada šipki dužine 4,5 metara. Nabavna služba može obezbediti najviše 200 komada šipki dužine 15 metara. Koliko nabavljenih šipki treba raseći i na koji način, ako je cilj minimalni otpad?

**R 21.** Varijante sečenja šipke dužine 15 m sadržane su u sledećoj tabeli:

Potrebne dužine	Varijante sečenja													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4,5 m	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
3,0 m	0	2	1	0	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
2,5 m	0	0	1	2	0	1	3	4	0	1	2	3	4	6
Otpadak	1,5	0	0,5	1	1,5	2	0	0,5	0	0,5	1	1,5	2	0

Neka je  $x_j$  ( $j=1,2,\dots,14$ ) broj rasečenih šipki dužine 15 m po  $j$ -toj varijanti.

Model:

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, 14$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 200$$

$$2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 + 5x_9 + 4x_{10} + 3x_{11} + 2x_{12} + x_{13} = 500$$

$$x_3 + 2x_4 + x_6 + 3x_7 + 4x_8 + x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 6x_{14} \geq 240$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 200$$

$$1,5x_1 + 0,5x_3 + x_4 + 1,5x_5 + 2x_6 + 0,5x_8 + 0,5x_{10} + x_{11} + 1,5x_{12} + 2x_{13} = v \rightarrow \min$$

**PRIMER 22.** Fabrika papira proizvodi papirne valjke standardne dužine i širine 40 cm. Kupci traže valjke standardne dužine ali različitih širina. Postoje porudžbine za: 2000 komada širine 18 cm, 600 komada širine 17 cm i 10000 komada širine 10 cm. Veće količine nije moguće plasirati na tržištu, ali se porudžbinama mora udovoljiti u celosti. Na koji način i koliko da se izvrši sečenje valjaka širine 40 cm, ako je cilj da broj rasečenih valjaka bude minimalan?

**R 22.** Varijante sečenja su date sledećom tabelom:

Potrebne širine	Varijante sečenja					
	1	2	3	4	5	6
18 cm	2	1	1	0	0	0
17 cm	0	1	0	2	1	0
10 cm	0	0	2	0	2	4
Otpadak	4	5	2	6	3	0

Neka je  $x_j$  ( $j=1,2,3,4,5,6$ ) broj rasečenih valjaka standardne dužine, širine 40 cm, po  $j$ -toj varijanti sečenja. Model:

$$\begin{aligned}
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \\
 & 2x_1 + x_2 + x_3 = 2000 \\
 & \quad x_2 + 2x_4 + x_5 = 600 \\
 & \quad \quad 2x_3 + 2x_5 + 4x_6 = 10000 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = v \rightarrow \min
 \end{aligned}$$

**PRIMER 23.** Fabrika nameštaja proizvodi kancelarijske ormane. Za jedan orman potreban je sledeći broj drvenih ploča: 5 komada dimenzija 40×80 cm, 4 komada dimenzija 40×100 cm i 4 komada dimenzija 40×70 cm. Pogon za sečenje raspolaže sa 2700 ploča dimenzija 40×310 cm, koje treba raseći za proizvodnju ormana. Na koliko načina se mogu raseći ploče dimenzije 40×310 cm? Koliko ormana se može proizvesti ako je cilj minimalni otpadak? (Napomena: prilikom konstrukcije modela koristiti dve proporcije za postavljanje odnosa drvenih ploča po jednom ormanu)!

**R 23.** Varijante sečenja date su sledećom tabelom:

Potrebne dimenzije	Varijante sečenja									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40×100 cm	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
40×80 cm	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
40×70 cm	0	0	1	0	1	3	1	2	3	4
Otpadak	10	30	40	50	60	0	0	10	20	30

Neka je  $x_j$  ( $j=1,2,\dots,10$ ) broj rasečenih ploča 40×310 cm po  $j$ -toj varijanti. Model:

$$x_1, x_2, \dots, x_{10} \geq 0 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 2700 \quad (2)$$

$$15x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 3x_4 + x_5 + 5x_6 - 12x_7 - 8x_8 - 4x_9 = 0 \quad (3)$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_6 - x_7 - 2x_8 - 3x_9 - 4x_{10} = 0 \quad (4)$$

$$10x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 50x_4 + 60x_5 + 10x_8 + 20x_9 + 30x_{10} = v \rightarrow \min \quad (5)$$

$$(3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6) / 4 = (x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_7 + 2x_8 + x_9) / 5 =$$

$$= (x_3 + x_5 + 3x_6 + x_7 + 2x_8 + 3x_9 + 4x_{10}) / 4$$

**PRIMER 24.** Jedna fabrika proizvodi dva proizvoda (A i B), pod sledećim uslovima:

- a) zbog ograničenog plasmana odnos obima proizvodnje A i B mora biti 3:2;
- b) za proizvodnju proizvoda A i B koriste se limene ploče veličina 1×6 m i 1×4,5 m, respektivno; nabavna služba može obezbediti 300 ploča dimenzija 1×20 m; za proizvodnju A i B treba raseći i utrošiti svih 300 komada nabavljenih ploča;
- c) proizvode treba obraditi na mašini M čiji kapacitet iznosi 6000 časova, a za proizvode A i B se troši 4, odnosno 3 časa po komadu respektivno;
- d) cilj je maksimalni obim proizvodnje.

**R 24.** Varijante sečenja su date sledećom tabelom:

Potrebne dimenzije	Varijante sečenja			
	1	2	3	4
1×6 m	3	2	1	0
1×4,5 m	0	1	3	4
Otpadak	2	3,5	0,5	2

Neka je  $x_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) broj rasečenih ploča dimenzija 1×20 m po  $j$ -toj varijanti.

Model:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 300 \quad (2)$$

$$6x_1 + x_2 - 7x_3 - 12x_4 = 0 \quad (3)$$

$$12x_1 + 11x_2 + 13x_3 + 12x_4 \leq 6000 \quad (4)$$

$$3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = z \rightarrow \max \quad (5)$$